

03 Vectoren

CORRECTIESLEUTEN

Inhoud

- verschil van vectoren
- scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal
- 4 Vectoren en coördinaten
- 5 Gebruik van vectoren in de meetkunde
- Signaaloefeningen**
- Differentiatietraject**
- Studiewijzer**



WAT JE AL KUNT

- een verschuiving volgens een vector herkennen en bepalen
- het begrip 'drager van een lijnstuk'
- lijnstukken op 1 mm nauwkeurig meten en tekenen
- een evenwijdige rechte tekenen aan een gegeven rechte door een gegeven punt
- het midden van een lijnstuk construeren
- de zwaartelijnen in een driehoek herkennen, definiëren en tekenen



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- de kenmerken van een vector
- in het vlak de som en het verschil van vectoren tekenen
- de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een scalaïr
- vectoren gebruiken om vraagstukken met krachten, verplaatsing en snelheden op te lossen
- rekenen met coördinaten van vectoren in het vlak voorzien van een assenstelsel
- een vector ontbinden in zijn componenten
- vectoren gebruiken om meetkundige eigenschappen te formuleren en te verklaren



IN DE KIJKER

De wiskunde functioneel gebruiken in toepassingen uit de de fysica / mechanica.



WISKUNDETAAL

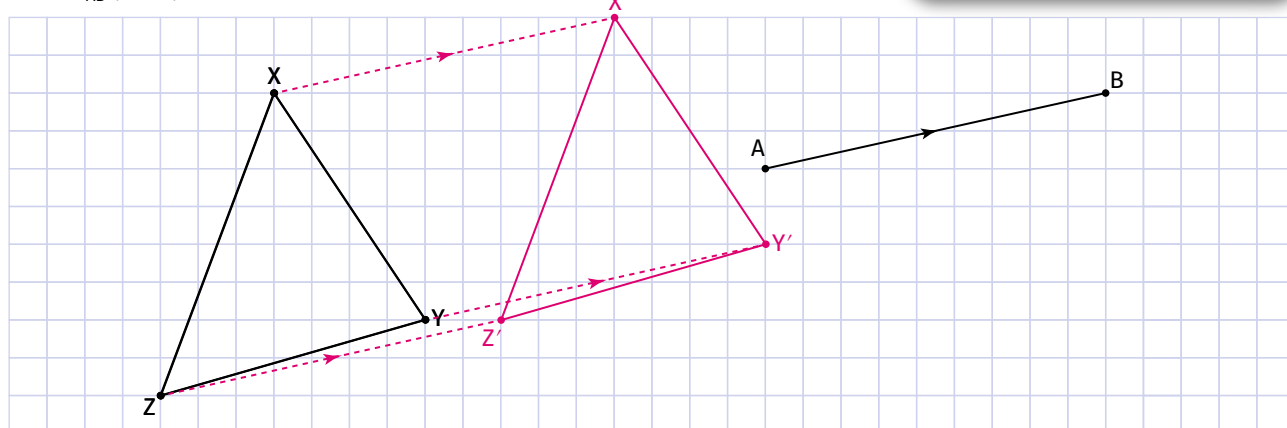
- een vector
- nulvector
- de richting
- de zin
- de norm van een vector
- het aangrijpingspunt
- vertegenwoordiger van een vector
- som en verschil van vectoren
- resultante
- parallellogramregel
- tegengestelde vectoren
- scalaïr veelvoud van een vector
- coördinaat van een vector
- eenheidsvector
- midden van een lijnstuk
- zwaartepunt in een driehoek



Instap

Opdracht 1

Teken $t_{\vec{AB}}$ (ΔXYZ).



$t_{\vec{AB}}$ (verschuif volgens de vector $\vec{AB}$).

Hoe lees je deze verschuiving?

Driehoek $X'Y'Z'$ is het schuifbeeld van driehoek XYZ door de verschuiving volgens de vector $\vec{AB}$.



Opdracht 2

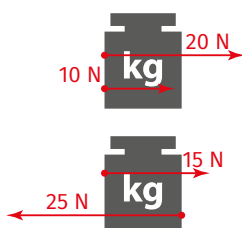
Op een zwaar voorwerp worden twee krachten uitgeoefend. Bekijk aandachtig de voorbeelden en zoek het verband tussen de uitgeoefende krachten en de nettokracht.



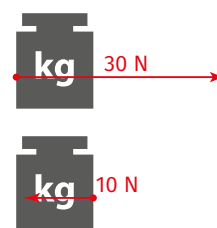
De grootte van kracht wordt uitgedrukt in F (naar het Engelse 'force'). De eenheid van kracht wordt uitgedrukt in N (Newton).

Voorbeelden

uitgeoefende krachten

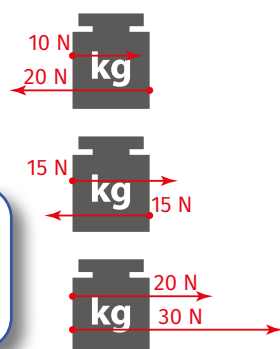


nettokracht

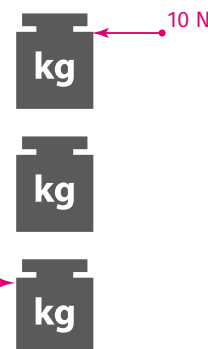


Teken telkens één kracht die hetzelfde effect heeft als de twee getekende krachten, we noemen dat de nettokracht.

uitgeoefende krachten



nettokracht

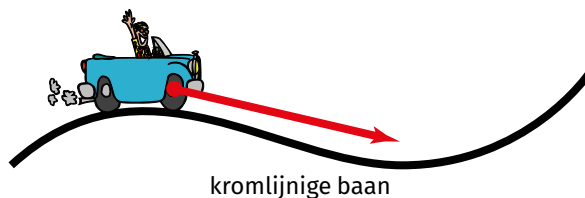


In de fysica stelt men een vector doorgaans zo voor: $\rightarrow$

Opdracht 3

Hoe kan een bestuurder van een wagen ...

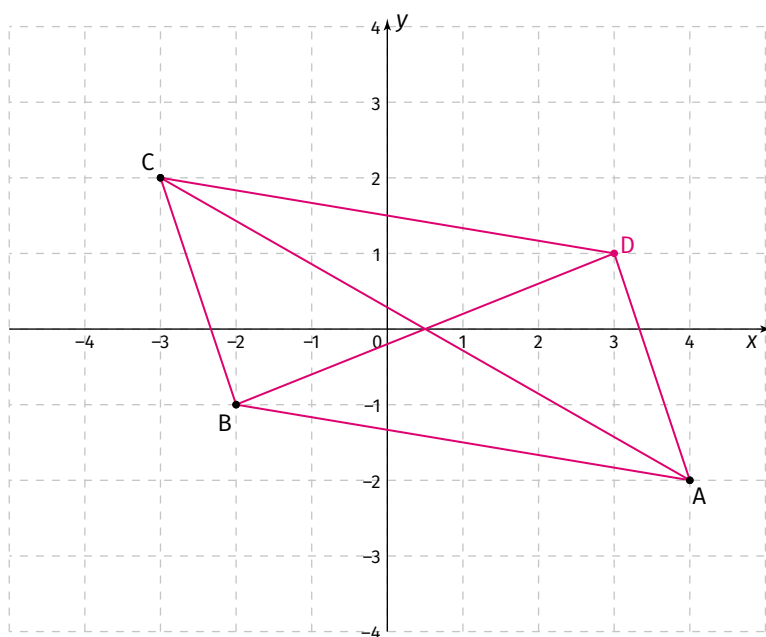
- de grootte van de snelheid veranderen? door te remmen of door gas te geven
- de richting van de beweging veranderen? door het stuur te draaien



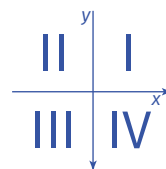
Opdracht 4

De punten A, B en C zijn drie hoekpunten van parallellogram ABCD. Teken het parallellogram ABCD als je weet dat het punt D in het eerste kwadrant ligt.

definitie Een **parallellogram** is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.



TIP De assen verdelen het assenstelsel in vier kwadranten.



Vul aan.

co (D) = (3, 1)

Eigenschappen

In een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang.

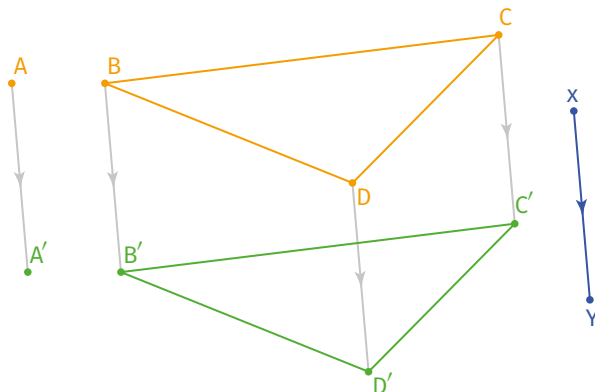
In een parallellogram zijn de overstaande hoeken even groot.

In een parallellogram snijden de diagonalen elkaar middendoor.

1 Vectoren

1.1 Het begrip vector

Op deze tekening zie je het punt A en de driehoek BCD verschoven volgens een vector.



$\overrightarrow{XY}$ is een vector, dit is een lijnstuk met een beginpunt X en een eindpunt Y of anders een lijnstuk waarop een oriëntatie of pijlpunt staat.

notatie $\overrightarrow{XY}$ of $\vec{v}$

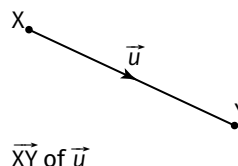
Dit lees je als 'de vector $\overrightarrow{XY}$ ' of 'de vector $\vec{v}$ '.

Met behulp van meetkundesoftwae kun je het beeld tekenen van meetkundige objecten door een verschuiving volgens een vector.



— Merk op —

Een vector kan ook aangeduid worden met een kleine letter met een pijl.



1.2 Kenmerken van een vector

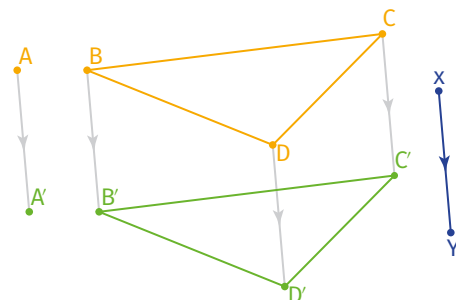
Na het uitvoeren van de verschuiving hebben we 5 vectoren:

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{XY}$

- De dragers van de vectoren hebben dezelfde **richting**: $XY \parallel AA' \parallel BB' \parallel \dots$
- De vectoren hebben dezelfde **grootte**: $|XY| = |AA'| = |BB'| = \dots$
- De vectoren hebben dezelfde **zin**: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{XY}$

We kunnen besluiten dat een vector wordt bepaald door drie kenmerken:

- grootte;
- richting;
- zin.

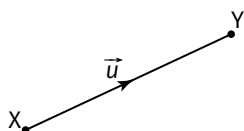


— Merk op —

- Een vector met hetzelfde beginpunt als eindpunt noemen we de **nulvector**. We noteren dit als $\vec{0}$.



De lengte van het lijnstuk $[XY]$ noemen we de **grootte** of de **norm** van vector $\vec{u}$
 We noteren dit als $||\vec{u}||$.



We lezen dit als: de norm van vector $\vec{u}$.
 $||\vec{u}|| = 3 \text{ cm}$

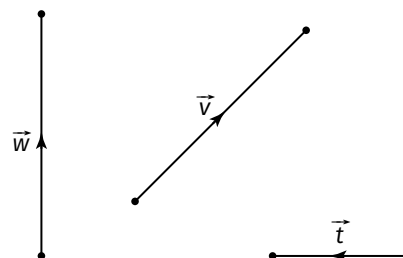
Als we de vectoren $\vec{t}$, $\vec{w}$, en $\vec{v}$ meten dan is ...

$$||\vec{w}|| = 3,2 \text{ cm}$$

$$||\vec{v}|| = 3,2 \text{ cm}$$

$$||\vec{t}|| = 1,8 \text{ cm}$$

De vectoren $\vec{w}$ en $\vec{v}$ zijn even lang of $||\vec{w}|| = ||\vec{v}||$.



Een **eenheidsvector** is een vector met norm 1.

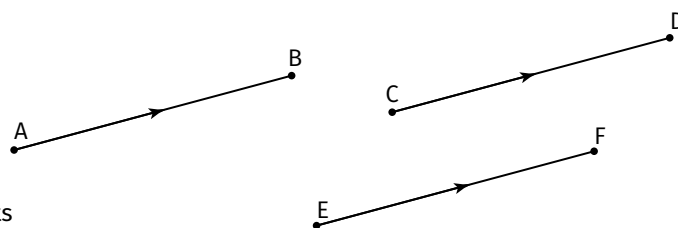
1.3 Gelijke en tegengestelde vectoren

Bij een verschuiving gebruiken we **gelijke vectoren**. Ze hebben eenzelfde grootte, richting en zin.



— Merk op —

Hoewel je meerdere vectoren ziet, spreken we slechts van één vector. De getekende vectoren noemt men dan verschillende **vertegenwoordigers** van dezelfde vector.



Vectoren die eenzelfde grootte en richting hebben, maar een verschillende zin, noemen we **tegengestelde vectoren**.
 De vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{CD}$ zijn tegengesteld.

notatie

$$\vec{AB} = -\vec{CD}$$

definitie

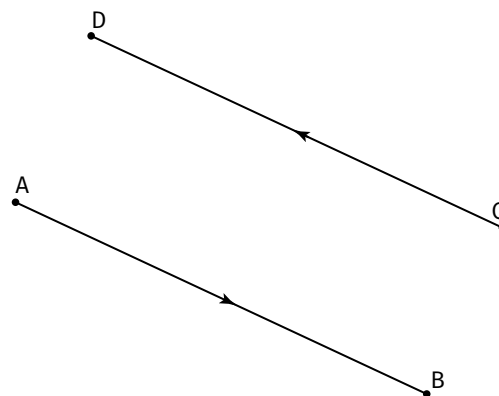
Tegengestelde vectoren zijn vectoren die eenzelfde grootte en richting hebben, maar een verschillende zin.



— Merk op —

$\vec{XY} \neq \vec{YX}$ Dit zijn geen gelijke vectoren.
 Ze hebben een andere zin.

$\vec{XY} = -\vec{YX}$ Dit zijn wel gelijke vectoren.



1.4 Toepassingen van vectoren

In de fysica worden de meeste grootheden voorgesteld door een getal gevolgd door een eenheid.

Voorbeelden

lengte: $l = 1,84 \text{ m}$

volume: $V = 1 \text{ cm}^3$

oppervlakte: $A = 37,72 \text{ km}^2$

massa: $m = 200 \text{ g}$

temperatuur: $T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$

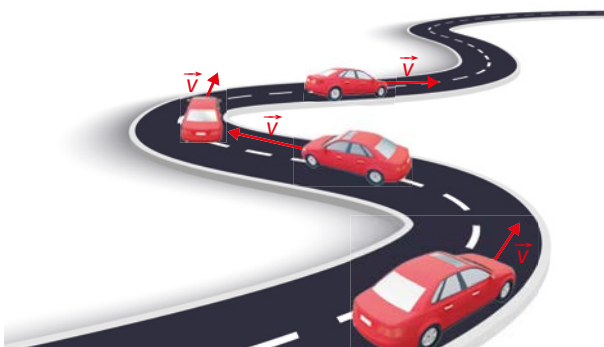
druk: $p = 3 \text{ bar}$

Voor sommige grootheden, zoals snelheid en kracht, is niet enkel de grootte maar ook de richting, zin en het aangrijpingspunt van belang. Kortom, hier zullen vectoren worden gebruikt.

snelheid: $v = 5 \text{ m/s}$

krachten: $F = 10 \text{ N (newton)}$

Voorbeeld 1



Een auto rijdt op een kronkelweg. De richting van de snelheid van de wagen verandert als de auto een bocht neemt. Ook de grootte van de snelheid van de auto verandert. De auto rijdt vrij langzaam in de bocht, maar na de bocht volgt er een versnelling.

Voorbeeld 2

Een man duwt een grasmaaier vooruit. Op de grasmaaier werken verschillende krachten:

- de kracht $\vec{F}$ waarmee de man op de stang van de grasmaaier duwt
- de wrijvingskrachten $\vec{F}_{w1}$ en $\vec{F}_{w2}$ tussen de wielen van de grasmaaier en het gras
- de zwaartekracht $\vec{F}_Z$
- de opwaartse kracht $\vec{F}_N$ (kracht die de bodem op de grasmaaier uitoefent)



Die krachten verschillen niet enkel in grootte, maar heel wat krachten hebben ook een andere richting of zin.

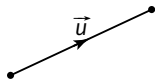


Verwerkingsopdrachten



1

a) Meet en noteer de norm van $\vec{u}$ in symbolen.



$$||\vec{u}|| = 2,2 \text{ cm}$$

b) Schrap wat niet past.

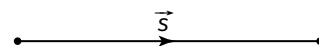
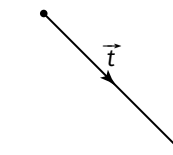
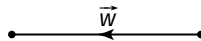
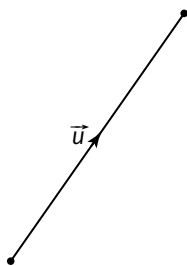


De ~~richting~~ / ~~zin~~ van deze vector is verticaal.

De ~~richting~~ / ~~zin~~ van deze vector is naar beneden.

2

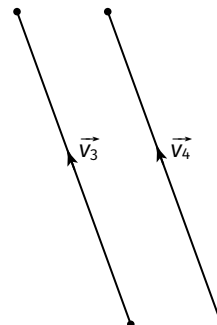
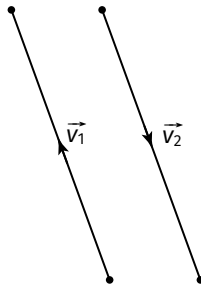
a) Noteer de vectoren met dezelfde richting en de vectoren met dezelfde grootte.



vectoren met dezelfde richting: $\vec{u}$ en $\vec{v}$; $\vec{w}$ en $\vec{s}$

vectoren met dezelfde grootte: $\vec{u}$ en $\vec{s}$; $\vec{w}$ en $\vec{t}$

b) Noteer de gelijke vectoren en de tegengestelde vectoren.



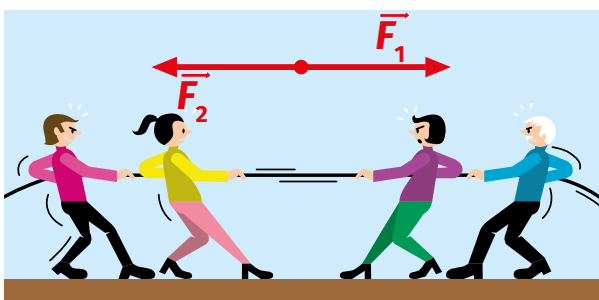
gelijke vectoren: $\vec{v}_3$ en $\vec{v}_4$

tegengestelde vectoren: $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$

3



Bestudeer de volgende afbeelding. Markeer daarna de juiste opties in de tekst.



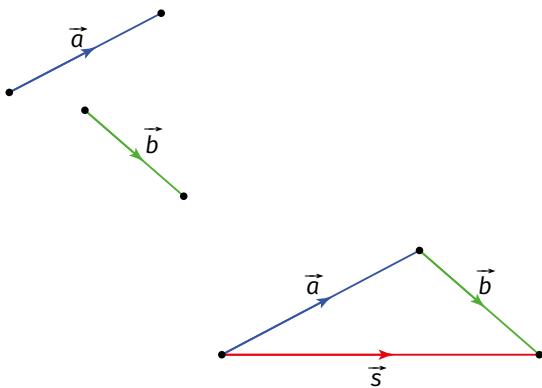
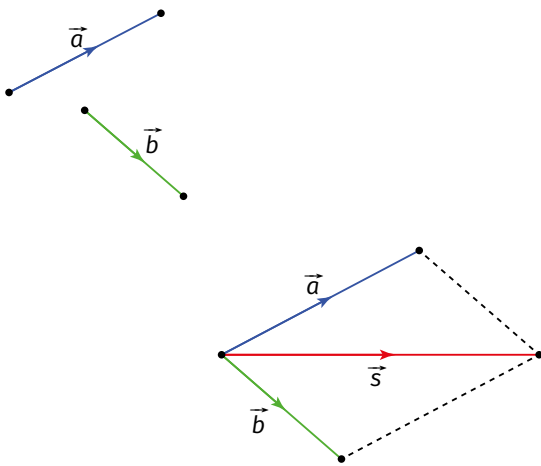
- De kracht die het rechtse team uitoefent op de tegenstander wordt hier weergegeven met de vector $\vec{F}_1$ / $\vec{F}_2$.
- De vectoren $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ hebben dezelfde ~~richting~~ / ~~zin~~ maar een tegengestelde ~~richting~~ / ~~zin~~.
- Het linkse team oefent een kracht uit die ~~groter~~ / ~~even groot~~ / ~~kleiner~~ is dan het rechtse team.
- Daarom wint het ~~rechtse team~~ / ~~geen enkel team~~ / ~~het linkse team~~.

2 Som en verschil van vectoren

Meestal werken er meerdere krachten in op een voorwerp. Op zo'n moment is het handig om al die krachten te kunnen uitdrukken met één kracht. Daarvoor zullen we bewerkingen uitvoeren met vectoren.

2.1 Som van vectoren

Om de som van 2 vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te vinden, kun je twee methodes gebruiken:

methode	DE KOP-STAART-REGEL OF DRIEHOEKREGEL	DE PARALLELOGRAMREGEL
	Je verbindt de kop van de eerste vector met de staart van de tweede vector. Hoe teken je de som van twee vectoren? STAP 1: Verschuif het beginpunt van de ene vector naar het eindpunt van de andere vector. STAP 2: Verbind het beginpunt van de eerste vector met het eindpunt van de tweede vector.  De somvector wijst van het vrije beginpunt naar het vrije eindpunt zoals in de figuur.	Hoe teken je de som van twee vectoren? STAP 1: Verschuif beide vectoren zodat ze hetzelfde beginpunt hebben. STAP 2: Teken vervolgens een parallellogram met als zijden de twee vectoren. STAP 3: Teken de diagonaal die vertrekt uit het beginpunt van de twee vectoren, dit is de somvector.  De somvector wijst van het gemeenschappelijke beginpunt naar het tegenoverliggende hoekpunt zoals in de figuur.



— Merk op —

Een belangrijke toepassing van de vectoren vinden we bij krachten. De som van alle krachtvectoren die op een voorwerp inwerken, noemen we de **resulterende kracht**.

Als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting hebben, herleidt de constructie van het parallellogram of de driehoek zich tot een rechte lijn. We onderscheiden twee gevallen:

- de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben dezelfde zin:



De somvector $\vec{s}$ heeft dezelfde richting en zin als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Om de grootte van de somvector te bepalen, moet je de grootte van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ optellen.

- de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben een tegengestelde zin:



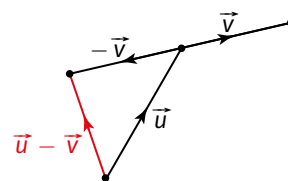
De somvector $\vec{s}$ heeft dezelfde richting als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en de zin van de grootste vector.

Om de grootte van de somvector te bepalen, moet je de grootte van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ van elkaar aftrekken (de grootste min de kleinste).

2.2 Verschil van vectoren

Het verschil van een vector $\vec{u}$ met een vector $\vec{v}$ definiëren we als de som van de eerste vector $\vec{u}$ met het tegengestelde van de tweede vector $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



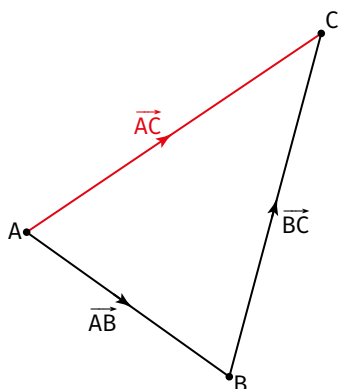
Hoe teken je het verschil van twee vectoren?

methode

STAP 1: Je keert de zin van de ene vector ($\vec{v}$) om, zodat je zijn tegengestelde ($-\vec{v}$) verkrijgt.

STAP 2: Tel de tweede vector ($\vec{u}$) op met de tegengestelde vector ($-\vec{v}$).

2.3 Formule van Chasles-Möbius



Het eindpunt van $\vec{AB}$ is het beginpunt van $\vec{BC}$. Als we bij deze twee vectoren de kop-staart-regel toepassen dan is $\vec{AC}$ de somvector.

$$\text{Of } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

middelste letters zijn dezelfde

formule

FORMULE CHASLES-MÖBIUS

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



Verwerkingsopdrachten

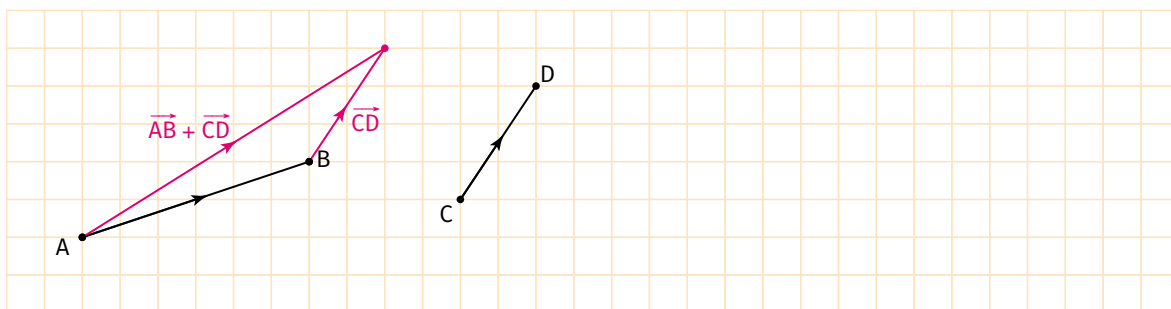


2, 3, 4

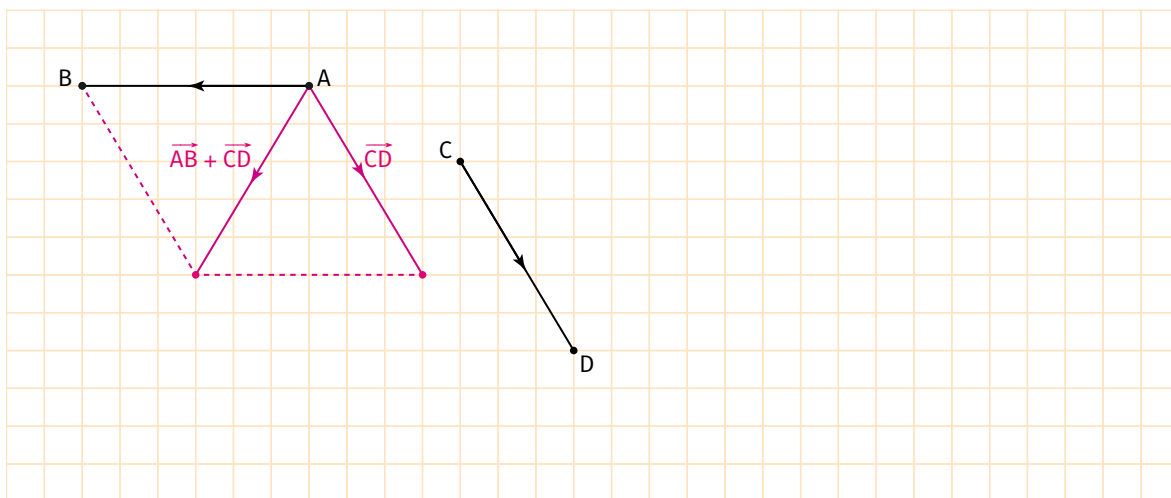
4

Teken de somvector $\vec{AB} + \vec{CD}$ die het punt A als beginpunt heeft ...

a) met de kop-staart-regel.



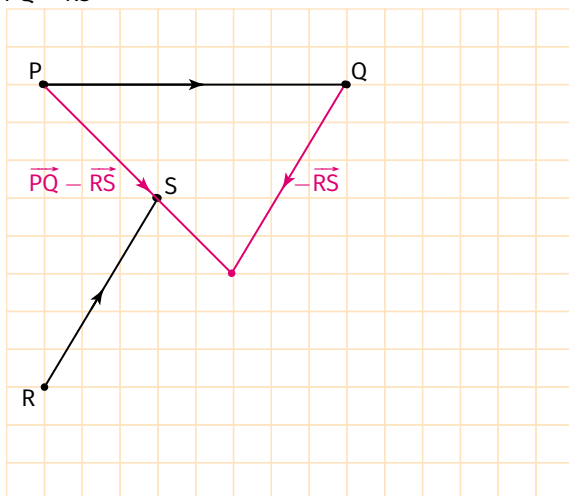
b) met de parallellogramregel.



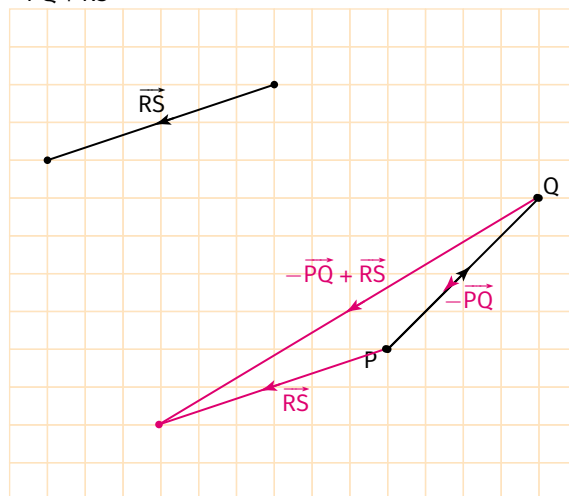
5

Teken telkens een vertegenwoordiger van de gevraagde vector.

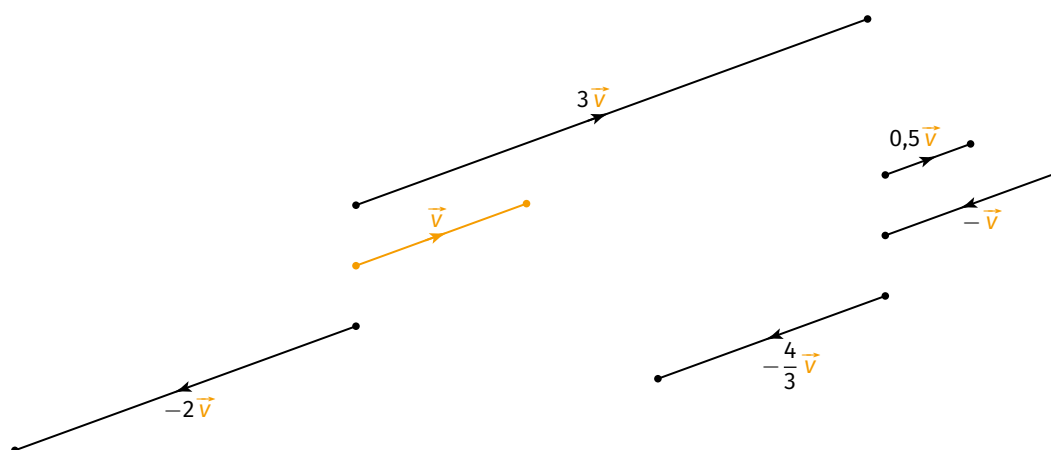
$\vec{PQ} - \vec{RS}$



$-\vec{PQ} + \vec{RS}$



3 Scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal



In deze figuur stellen we vast:

- De vector $3\vec{v}$ heeft dezelfde richting en zin als $\vec{v}$, maar is drie maal langer.
- De vector $-2\vec{v}$ is twee maal langer dan $\vec{v}$, heeft dezelfde richting als $\vec{v}$ maar een tegengestelde zin.
- De vector $0,5\vec{v}$ is twee keer korter dan $\vec{v}$ en heeft dezelfde richting en zin als $\vec{v}$.
- De vector $-\frac{4}{3}\vec{v}$ is vier derde keer langer dan $\vec{v}$ en heeft dezelfde richting en zin als $-\vec{v}$.

Het product van de vector $\vec{v}$ met een reëel getal k noteren we als $k\vec{v}$ en noemen we een **scalair** veelvoud van $\vec{v}$.



— Merk op —

- De term 'scalair' is een synoniem van het begrip 'reëel getal'.
- De gebruikelijke rekenregels blijven geldig.
 $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$, $2\vec{v} + 4\vec{v} = 6\vec{v}$, $5\vec{v} - \vec{v} = 4\vec{v}$, $\frac{5}{3}\vec{v} - \frac{8}{3}\vec{v} = \left(\frac{5}{3} - \frac{8}{3}\right)\vec{v} = (-1)\vec{v} = -\vec{v}$, ...
- Bij het noteren van een scalair veelvoud staat het getal niet onder het pijltje.



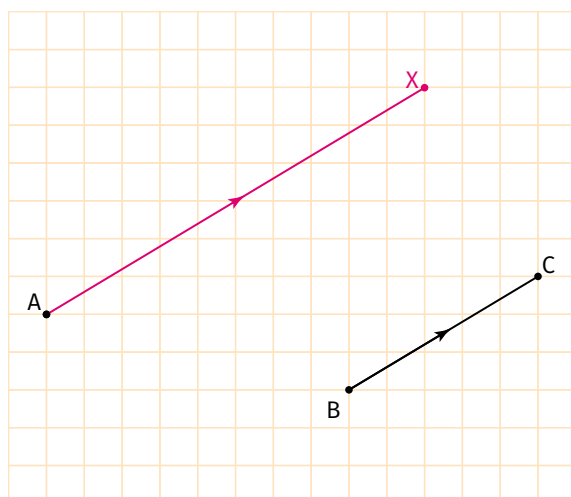
Verwerkingsopdracht



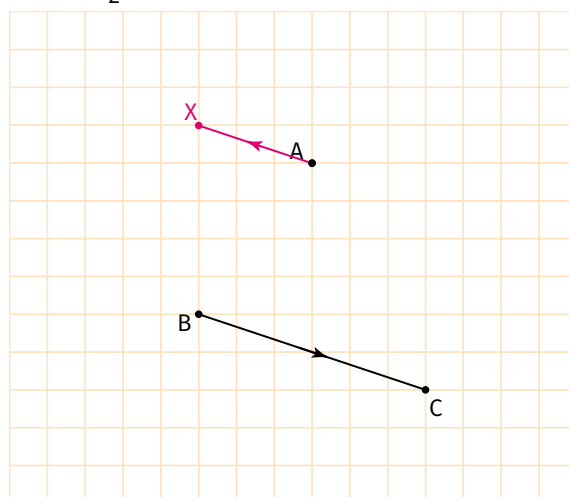
6

Teken het punt X zodat ...

$$\vec{AX} = 2\vec{BC}$$



$$\vec{AX} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$$





4 Vectoren en coördinaten

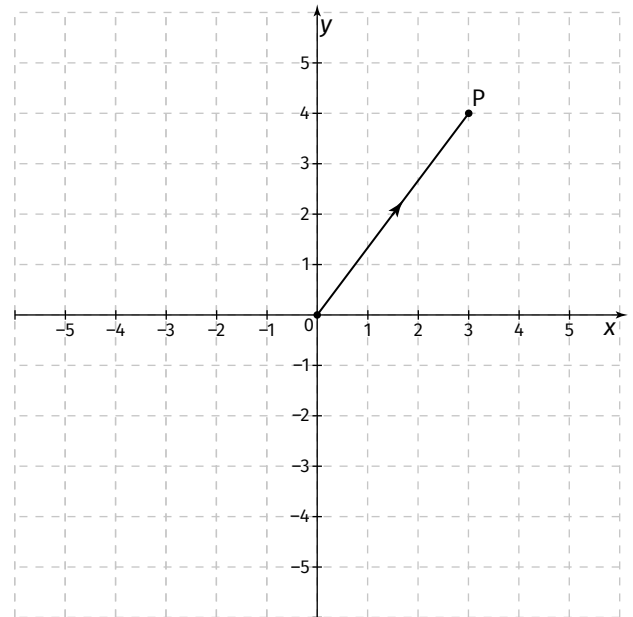
4.1 Coördinaat van een puntvector

De vector $\overrightarrow{OP}$ heeft als beginpunt de oorsprong O , en als eindpunt het punt P met coördinaat $(3, 4)$.

Een vector waarvan het beginpunt de oorsprong is, noemen we een **puntvector**. Kortweg noteer je deze vector als $\vec{P}$.

Om de coördinaat van $\vec{P}$ te bepalen, volstaat het om de coördinaat van P te bepalen.

Dus de coördinaat van $\vec{P}$ is $(3, 4)$.

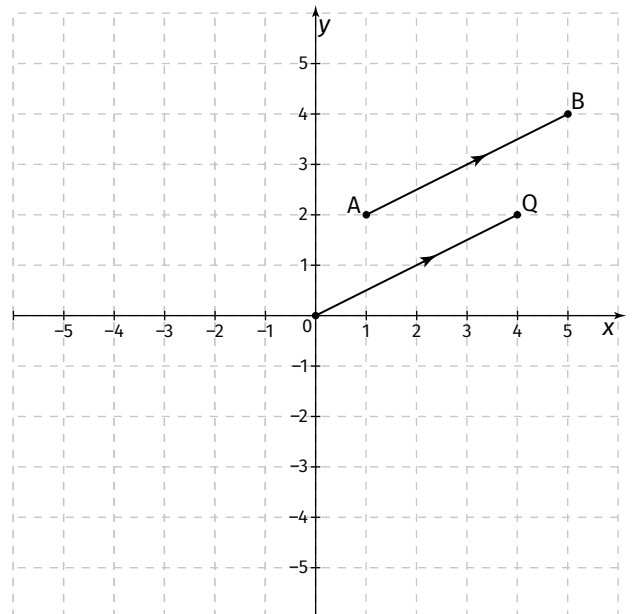


4.2 Coördinaat van een willekeurige vector

De vector $\overrightarrow{AB}$ heeft als beginpunt $A(1, 2)$ en als eindpunt $B(5, 4)$. Vector $\vec{Q}$ is een puntvector met coördinaat $(4, 2)$.

Aangezien $\overrightarrow{AB}$ en $\vec{Q}$ gelijke vectoren zijn, hebben ze ook dezelfde coördinaat.

Dus: $\text{co}(\overrightarrow{AB}) = \text{co}(\vec{Q}) = (4, 2)$.



— Merk op —

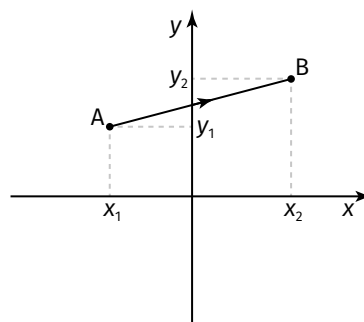
$$\vec{B}(5, 4)$$

$$\vec{A}(1, 2)$$

$$\vec{Q}(4, 2)$$

Algemeen:

De coördinaat van een willekeurige vector $\overrightarrow{AB}$ met als beginpunt $A(x_1, y_1)$ en als eindpunt $B(x_2, y_2)$ is $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.



4.3 Bewerkingen met coördinaten van vectoren

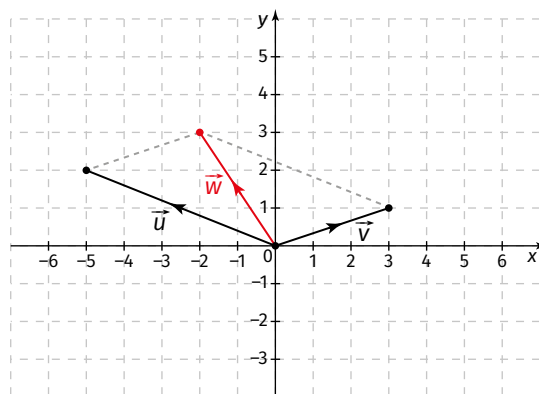
A) Som van twee vectoren

Van twee puntvectoren $\vec{u}(-5, 2)$ en $\vec{v}(3, 1)$ wordt de somvector $\vec{w}$ bepaald. We doen dit aan de hand van de parallelogramregel.

De coördinaat van $\vec{w}$ is $(-2, 3)$.

We stellen vast:

$$\begin{array}{r} \vec{u}(-5, 2) \\ \vec{v}(3, 1) \\ + \\ \hline \vec{w}(-2, 3) \end{array}$$



Algemeen:

Als $\vec{u}(x_1, y_1)$ en $\vec{v}(x_2, y_2)$ dan heeft de vector $\vec{u} + \vec{v}$ als coördinaat $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

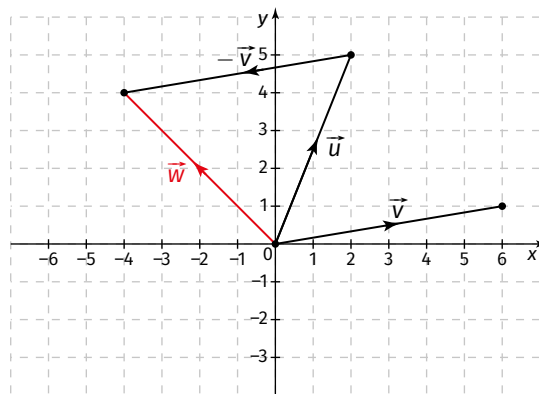
B) Verschil van twee vectoren

Van twee puntvectoren $\vec{u}(2, 5)$ en $\vec{v}(6, 1)$ wordt het verschil $\vec{w}$ bepaald. We doen dit aan de hand van de kop-staart-regel.

De coördinaat van $\vec{w}$ is $(-4, 4)$.

We stellen vast:

$$\begin{array}{r} \vec{u}(2, 5) \\ \vec{v}(6, 1) \\ - \\ \hline \vec{w}(-4, 4) \end{array}$$



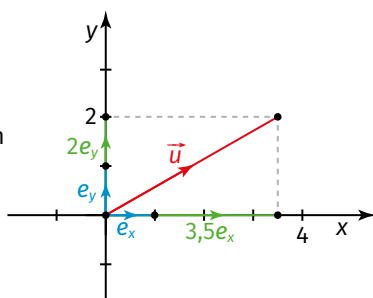
Algemeen:

Als $\vec{u}(x_1, y_1)$ en $\vec{v}(x_2, y_2)$ dan heeft de vector $\vec{u} - \vec{v}$ als coördinaat $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.



• Merk op •

$\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ zijn eenheidsvectoren
 $\vec{u} = 3,5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$



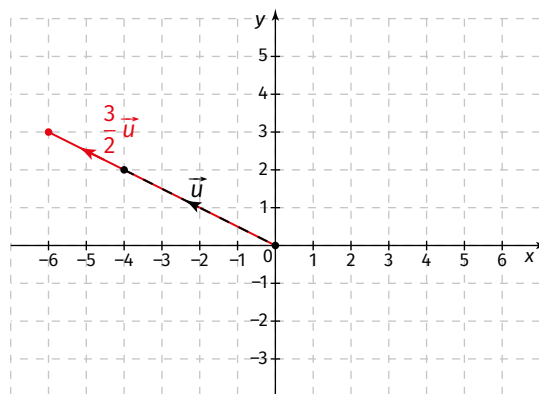
C) Scalair veelvoud van een vector

De puntvector $\vec{u}(-4, 2)$ en zijn veelvoud $\frac{3}{2}\vec{u}$ staan getekend in het assenstelsel.

De coördinaat van $\frac{3}{2}\vec{u}$ is $(-6, 3)$.

We stellen vast:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\vec{u} &= \frac{3}{2} \cdot (-4, 2) \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot (-4), \frac{3}{2} \cdot 2\right) \\ &= (-6, 3) \end{aligned}$$



Algemeen:

Als $\vec{u}(x_1, y_1)$ en k is een reëel getal dan heeft de vector $k\vec{u}$ als coördinaat (kx_1, ky_1) .

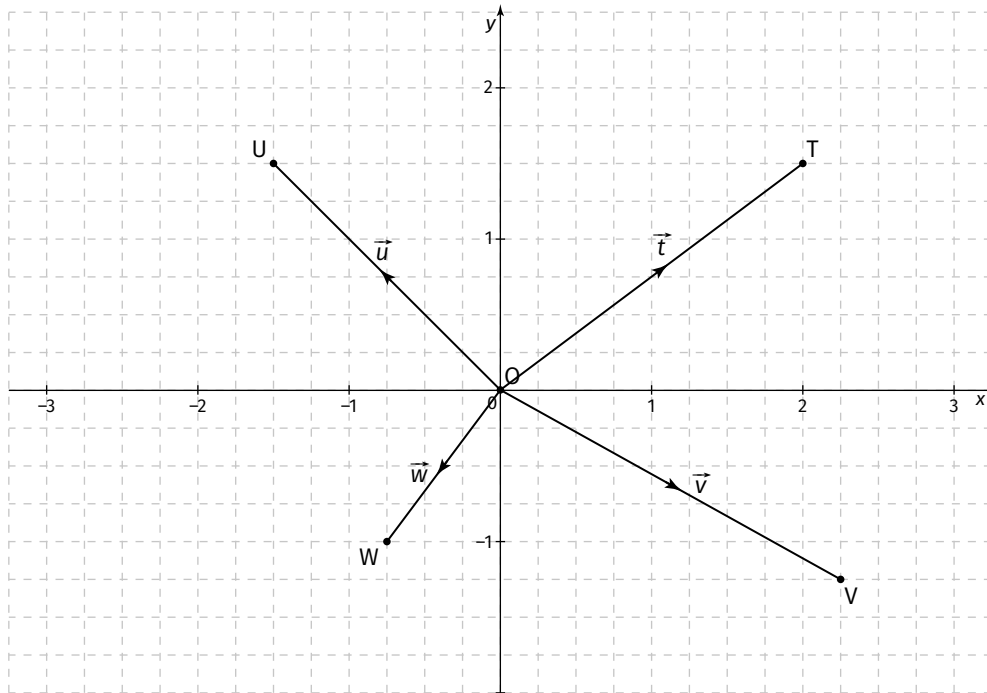


Verwerkingsopdrachten



7

Bepaal de coördinaat van de vier vectoren in de onderstaande figuur.



$$\text{co}(\vec{t}) = (2; 1,5)$$

$$\text{co}(\vec{u}) = (-1,5; 1,5)$$

$$\text{co}(\vec{v}) = (2,25; -1,25)$$

$$\text{co}(\vec{w}) = (-0,75; -1)$$

8

Bepaal de coördinaat van de vector $\overrightarrow{AB}$ als ...

a) A(2, 3) en B(5, 9)

$$\text{co}(\overrightarrow{AB}) = (3, 6)$$

c) A(-16, 4) en B(30, -12)

$$\text{co}(\overrightarrow{AB}) = (46, -16)$$

b) A(-3, 5) en B(7, 11)

$$\text{co}(\overrightarrow{AB}) = (10, 6)$$

d) A(0, -10) en B(-4, -9)

$$\text{co}(\overrightarrow{AB}) = (-4, 1)$$

9

Bereken de coördinaat van de vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ als ...

a) $\vec{u}(4, 2)$ en $\vec{v}(3, 1)$. $\text{co}(\vec{w}) = (7, 3)$

b) $\vec{u}(-5, 2)$ en $\vec{v}(8, -2)$. $\text{co}(\vec{w}) = (3, 0)$

c) $\vec{u}(-6, 3)$ en $\vec{v}(-3, -4)$. $\text{co}(\vec{w}) = (-9, -1)$

d) $\vec{u}\left(\frac{4}{3}, -2\right)$ en $\vec{v}\left(-\frac{19}{3}, 4\right)$. $\text{co}(\vec{w}) = (-5, 2)$

10

Bereken de coördinaat van de vector $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ als ...

a) $\vec{u}(-2, 4)$ en $\vec{v}(6, 1)$. $\text{co}(\vec{w}) = (-8, 3)$

b) $\vec{u}(4, 0)$ en $\vec{v}(1, -3)$. $\text{co}(\vec{w}) = (3, 3)$

c) $\vec{u}\left(-\frac{7}{4}, \frac{2}{5}\right)$ en $\vec{v}\left(-3, \frac{8}{5}\right)$. $\text{co}(\vec{w}) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{6}{5}\right)$

11

a) Bereken de coördinaat van de vector $-\frac{1}{4}\vec{v}$ als $\vec{v} = (-7, 12)$.

$$\text{co}\left(-\frac{1}{4}\vec{v}\right) = \left(\frac{7}{4}, -3\right)$$

b) Bereken de coördinaat van de vector $\sqrt{2}\vec{u}$ als $\vec{u} = (-3, \sqrt{2})$.

$$\text{co}(\sqrt{2}\vec{u}) = (-3\sqrt{2}, 2)$$



5 Gebruik van de vectoren in de meetkunde

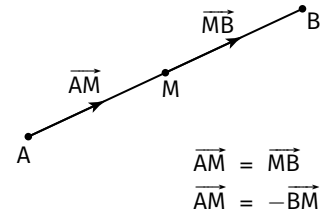
Vectoren kan je gebruiken om meetkundige begrippen en eigenschappen te bewijzen.

5.1 Midden van een lijnstuk

Als M het midden is van [AB], dan zijn de vectoren $\vec{AM}$ en $\vec{MB}$ aan elkaar gelijk. Deze twee vectoren hebben dezelfde lengte, richting en zin.

eigenschap $\left| \begin{array}{l} M \text{ is het midden van } [AB] \iff \vec{AM} = \vec{MB} \end{array} \right.$

Aangezien $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$ volgt hieruit dat $\vec{AM} = \vec{MB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$



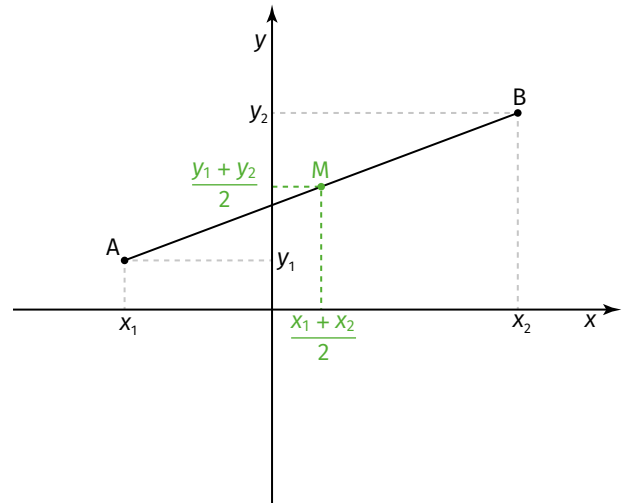
Als de coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk gegeven zijn, dan kan men gemakkelijk de coördinaat van het midden van het lijnstuk bepalen.

Veronderstel dat $\text{co}(A) = (x_1, y_1)$ en $\text{co}(B) = (x_2, y_2)$ dan heeft het midden M van het lijnstuk [AB] als coördinaat:

$$\text{co}(M) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$$



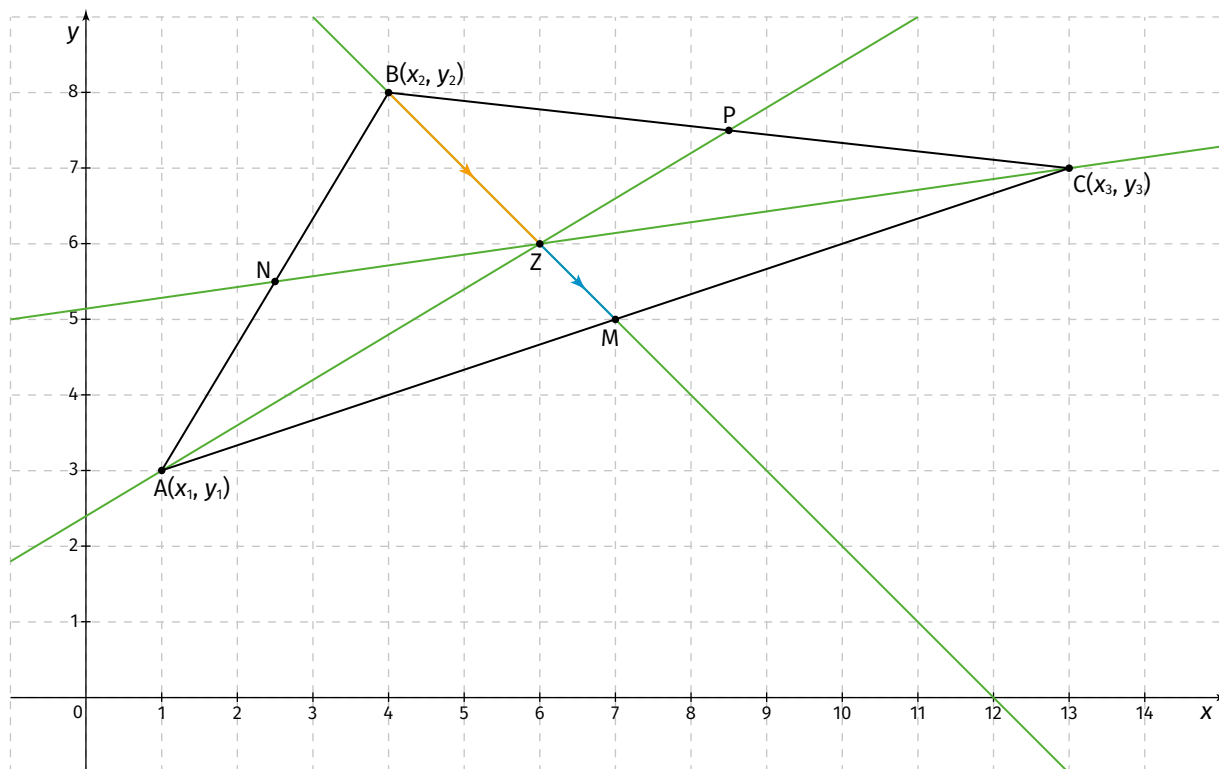
5.2 Het zwaartepunt van een driehoek

definitie $\left| \begin{array}{l} \text{Een zwaartelij} \text{ in een driehoek is een rechte door een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde.} \end{array} \right.$

De drie zwaartelijnen van een driehoek snijden elkaar in het zwaartepunt.

eigenschap $\left| \begin{array}{l} \text{Het zwaartepunt verdeelt een zwaartelij} \text{ in stukken die zich verhouden als 2:1.} \end{array} \right.$

Onderzoek deze eigenschap met ICT om dit vermoeden te bevestigen. Deze eigenschap zal je later nog leren bewijzen.



Als we gebruik maken van de eigenschap en de gegeven tekening dan noteren we:

$$\vec{BZ} = 2 \cdot \vec{ZM}$$

$$\vec{OZ} - \vec{OB} = 2(\vec{OM} - \vec{OZ})$$

$$\vec{OZ} - \vec{OB} = 2\vec{OM} - 2\vec{OZ}$$

$$\vec{OZ} + 2\vec{OZ} = 2\vec{OM} + \vec{OB}$$

$$3\vec{OZ} = \vec{AC} + \vec{OB}$$

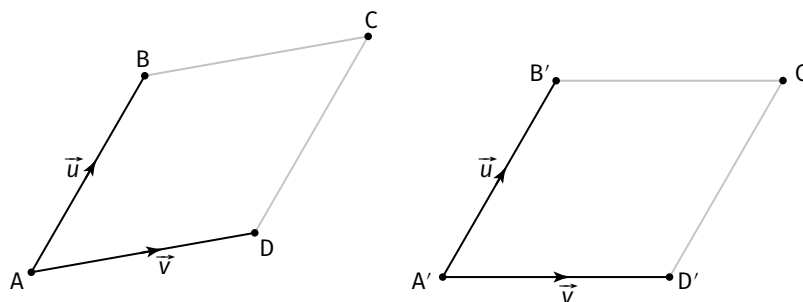
$$3\vec{OZ} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB}$$

$$\vec{OZ} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\text{Besluit co}(Z) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

5.3 Eigenschappen bewijzen met vectoren

Twee vectoren met een verschillende richting spannen samen een parallellogram op. Vectoren zijn dus handig om eigenschappen van parallellogrammen te bewijzen.



Voorbeeld

Diagonalenkenmerk:

Een vierhoek is een parallellogram als en slechts als de diagonalen elkaar middendoor snijden.

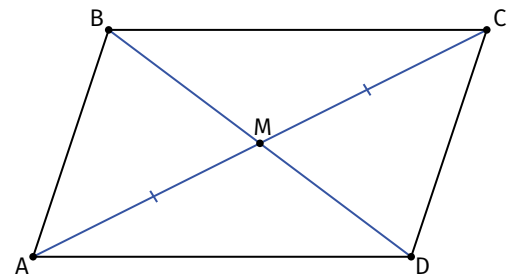
stelling De diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor.

Gegeven: parallellogram ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ en $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
M is het midden van [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

Te bewijzen: M is ook het midden van [BD] $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AM} \quad (\text{overstaande zijden van een parallellogram}) \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} \quad (M \text{ is het midden van } [AC]) \\ &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} \quad (\text{optellen van vectoren is commutatief}) \\ &= \overrightarrow{MD} \quad (\text{Chasles-Möbius})\end{aligned}$$



— Merk op —

De eigenschappen van bewerkingen kunnen we toepassen op vectoren.

We hebben bewezen dat de diagonalen van een parallellogram elkaar middendoor snijden. De omgekeerde bewering is ook waar.

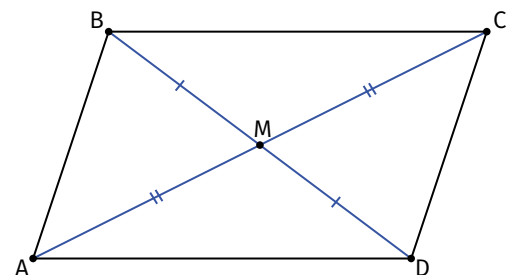
stelling Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor snijden, dan is de vierhoek een parallellogram.

Gegeven: vierhoek ABCD
M is het midden van [AC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$
M is het midden van [BD] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$

Te bewijzen: vierhoek ABCD is een parallellogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\ &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} \quad (M \text{ is het midden van } [AC] \text{ en } [BD]) \\ &= \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} \quad (\text{optellen is commutatief}) \\ &= \overrightarrow{DC} \quad (\text{Chasles-Möbius})\end{aligned}$$



We hebben bovenstaande stellingen in beide richtingen kunnen bewijzen.

We besluiten:

stelling **DIAGONALENKENMERK**
Een vierhoek is een parallellogram als en slechts als de diagonalen elkaar middendoor snijden.



Verwerkingsopdrachten



12

Bepaal de coördinaat van het midden M van het lijnstuk [AB] als $\text{co}(A) = (4, 1)$ en $\text{co}(B) = (-2, 5)$.

$$\text{co}(M) = \left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right)$$

$$\text{co}(M) = (1, 3)$$

13

Beschouw drie punten P, Q en R in het vlak met coördinaten $P(-3, -1)$, $Q(4, 4)$ en $R(4, 9)$.
Bepaal de coördinaat van het punt S zodat de vierhoek PQRS een parallellogram is.

M is het snijpunt van de diagonalen van PQRS.

$$\text{Dus } |PM| = |MR|$$

$$\text{co}(M) = \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{-1 + 9}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 4 \right) \quad (1)$$

Er geldt dat M het midden is van [QS] met $S(x, y)$.

$$(2) \text{ in } (1): \left(\frac{1}{2}, 4 \right) = \left(\frac{x + 4}{2}, \frac{y + 4}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x + 4}{2} \quad \text{en} \quad 4 = \frac{y + 4}{2}$$

$$1 = x + 4 \quad 8 = y + 4$$

$$-3 = x \quad 4 = y$$

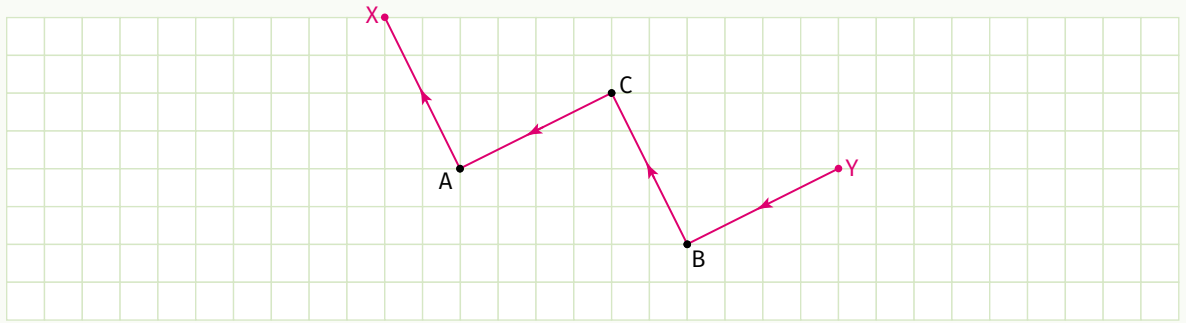
Antwoord: De coördinaat van het punt S is $(-3, 4)$.



Signaal oefeningen

1

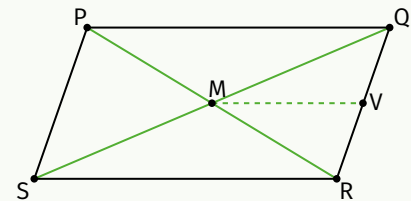
Teken de punten X en Y zodat $\vec{AX} = \vec{BC}$ en $\vec{YB} = \vec{CA}$.



>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D12

2

Gegeven: parallellogram PQRS
de diagonalen snijden elkaar in het punt M
 $V \in [QR]$
 $MV \parallel PQ$



Gevraagd: Vul telkens één vector in. Je mag geen minteken of een getal voor de vector schrijven.

a) $\vec{PM} + \vec{MQ} =$ $\vec{PQ}$

b) $2 \cdot \vec{PM} =$ $\vec{PR}$

c) $2 \cdot \vec{SM} + \vec{QR} =$ $\vec{SR}$

d) $\vec{MP} + \vec{MR} =$ $\vec{0}$

e) $-\vec{RQ} =$ $\vec{QR}$

f) $2 \cdot \vec{VM} =$ $\vec{QP}$

g) $2 \cdot \vec{MQ} + \vec{PS} =$ $\vec{SR}$

h) $\vec{PR} - \vec{PQ} =$ $\vec{PS}$

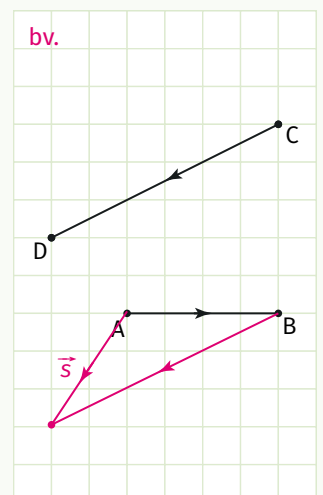
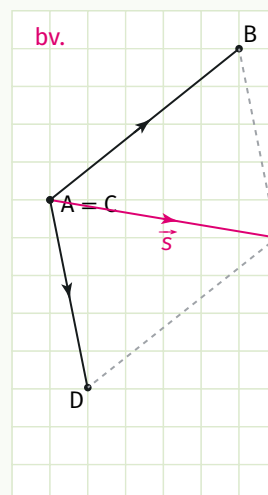
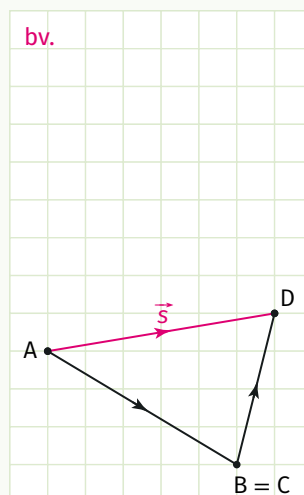
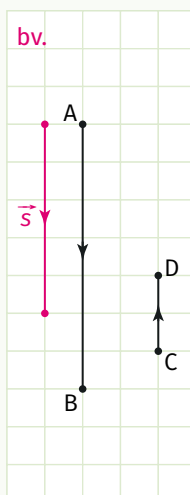
i) $\vec{QS} - \vec{MS} =$ $\vec{QM}$

j) $\vec{RM} - \vec{QM} =$ $\vec{RQ}$

>>> Verder oefenen: D24 t.e.m. D29

3

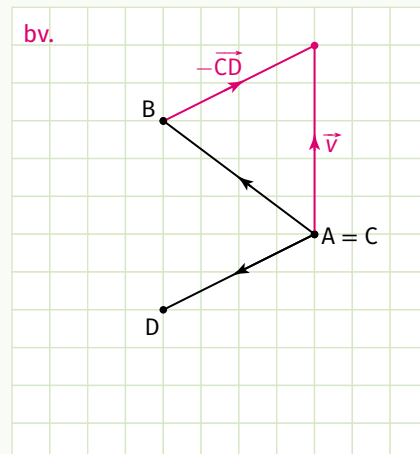
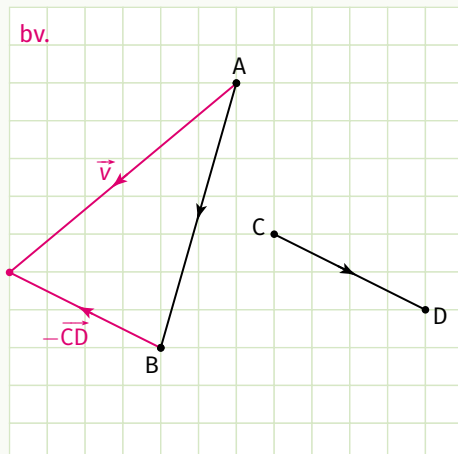
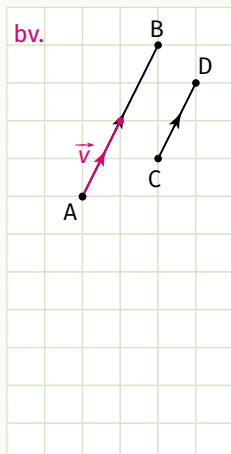
Teken telkens een vertegenwoordiger van de vector $\vec{s} = \vec{AB} + \vec{CD}$.



>>> Verder oefenen: D13 t.e.m. D23

4

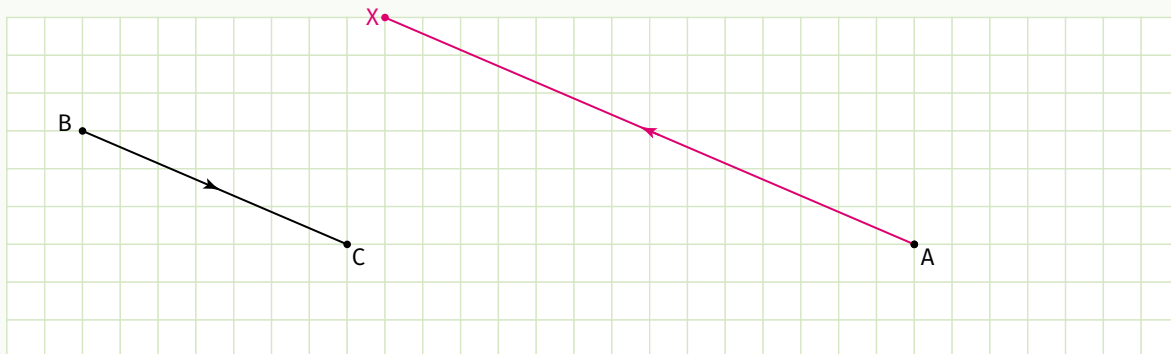
Teken telkens een vertegenwoordiger van de vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.



>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D34

5

Teken het punt X zodat $\overrightarrow{AX} = -2\overrightarrow{BC}$.



>>> Verder oefenen: D44 t.e.m. D57

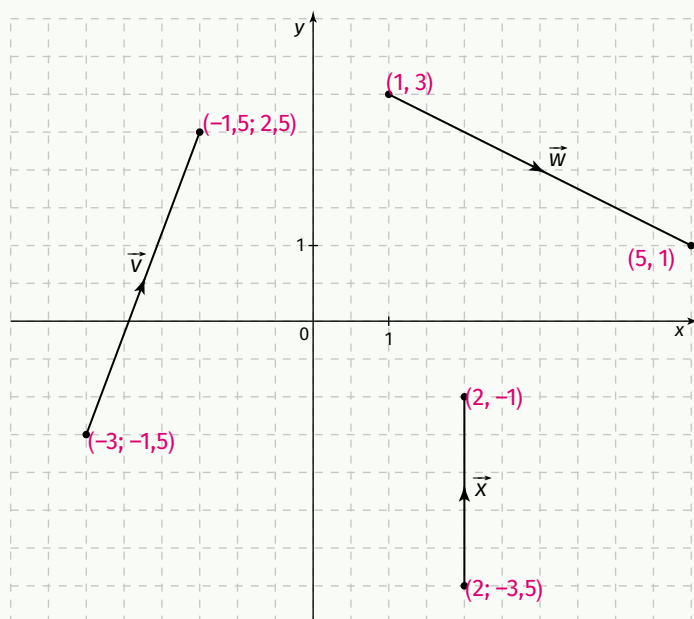
6

Bepaal de coördinaat van de vectoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ en $\vec{x}$.

$$\begin{aligned} \text{co}(\vec{v}) &= (-1, 5 + 3; 2, 5 + 1, 5) \\ \text{co}(\vec{v}) &= (1, 5; 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{co}(\vec{w}) &= (5 - 1; 1 - 3) \\ \text{co}(\vec{w}) &= (4; -2) \end{aligned}$$

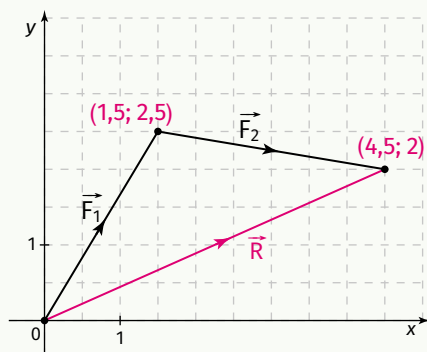
$$\begin{aligned} \text{co}(\vec{x}) &= (2 - 2; -1 + 3, 5) \\ \text{co}(\vec{x}) &= (0; 2, 5) \end{aligned}$$



>>> Verder oefenen: D58 t.e.m. D63

7

Bepaal de coördinaat van de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ samen met de coördinaat van hun resulterende kracht $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



$$\text{co}(\vec{F}_1) = (1,5; 2,5)$$

$$\text{co}(\vec{F}_2) = (4,5 - 1,5; 2 - 2,5)$$

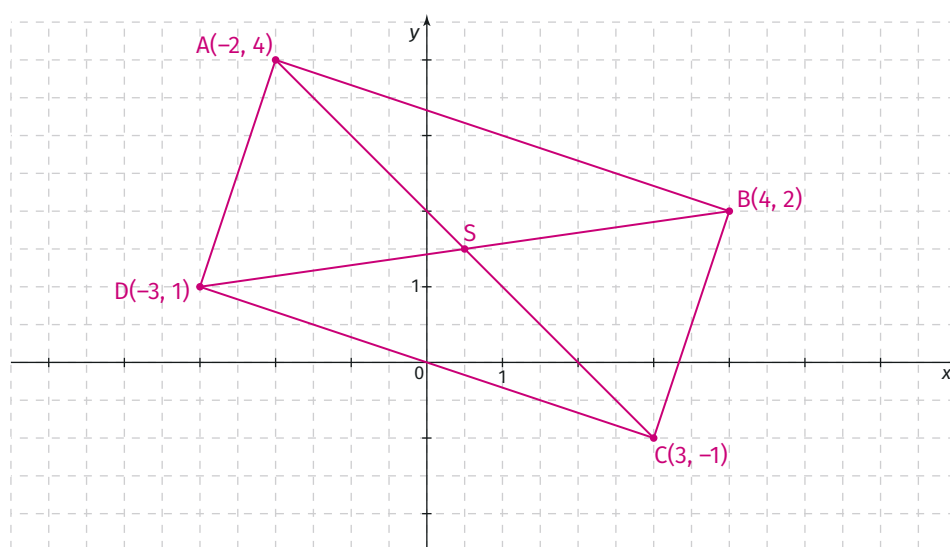
$$\text{co}(\vec{F}_2) = (3; -0,5)$$

$$\text{co}(\vec{R}) = (4,5; 2)$$

>>> Verder oefenen: D58 t.e.m. D63,

8

De hoekpunten van het parallellogram ABCD hebben als coördinaten A(-2, 4), B(4, 2), C(3, -1) en D(-3, 1). Bepaal de coördinaat van het snijpunt S van de diagonalen van het parallellogram. Controleer je berekening aan de hand van een tekening.



S is het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram en dus ook telkens het midden van de diagonalen.

$$\text{co}(\vec{S}) = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{4-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

Antwoord: Het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram is $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

>>> Verder oefenen: D64 t.e.m. D74



Differentiatetraject

module p. 23

1

Noteer de naam van de vectoren en rangschik de norm van de vectoren van klein naar groot.

K
↓
L

①

M → N

②

P → O

④

③

① $\vec{KL}$

② $\vec{MN}$

③ $\vec{OP}$

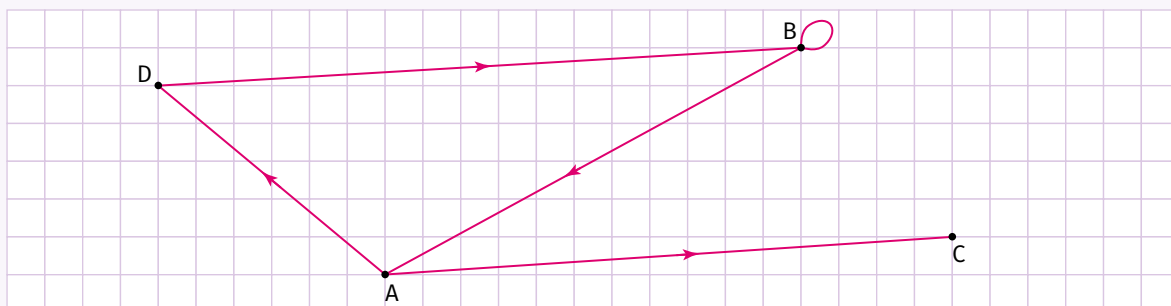
④ $\vec{O}$ of $\vec{PP}$

$$\|\vec{O}\| < \|\vec{OP}\| < \|\vec{KL}\| < \|\vec{MN}\|$$

2

Stel hieronder de volgende vectoren voor: $\vec{AD}$, $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{BB}$, $\vec{DB}$.

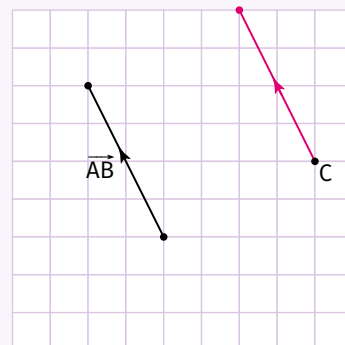
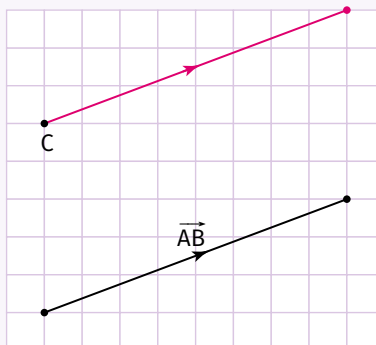
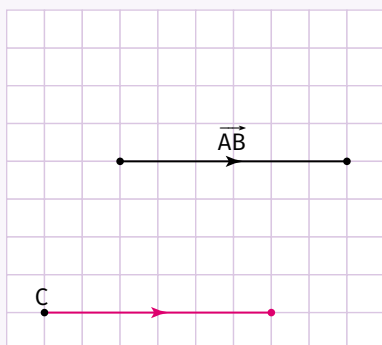
Welke speciale benaming geeft men aan de vector $\vec{BB}$?



$\vec{BB}$ noemt men ook een nulvector.

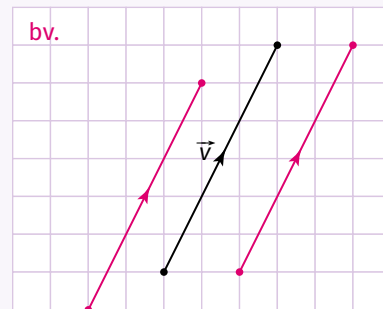
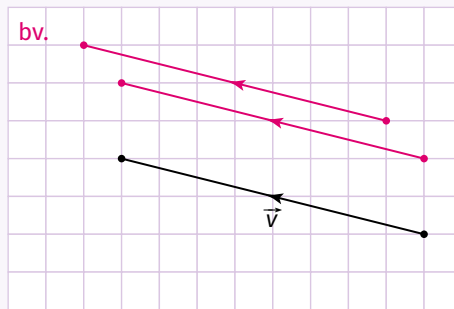
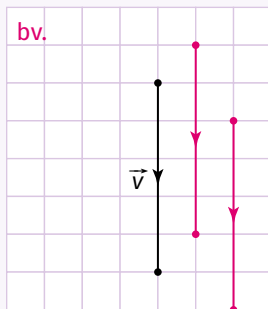
3

Teken telkens de vertegenwoordiger van de vector $\vec{AB}$ die het punt C als beginpunt heeft.



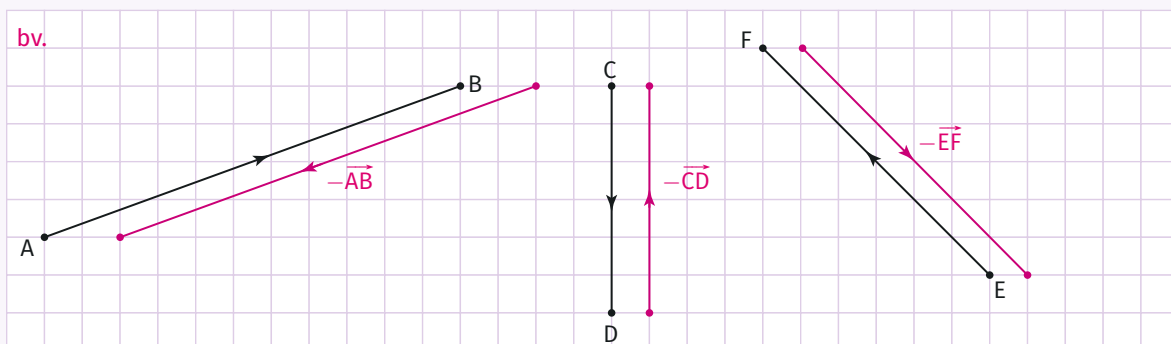
4

Teken telkens nog twee andere vertegenwoordigers van de vector $\vec{v}$.



5

Hieronder zijn enkele vectoren getekend. Teken de tegengestelde vector van elke getekende vector.



Vul aan.

De tegengestelde vector van $\vec{AB}$ is $-\vec{AB} = \vec{BA}$.

De tegengestelde vector van $\vec{CD}$ is $-\vec{CD} = \vec{DC}$.

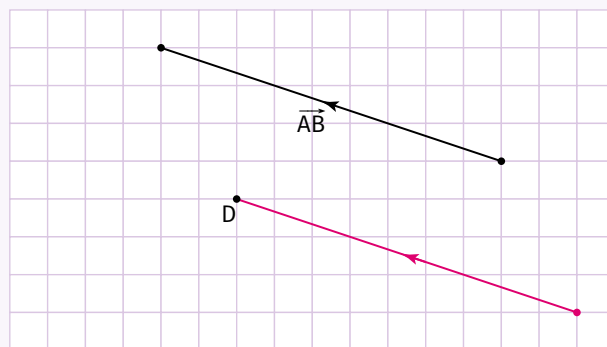
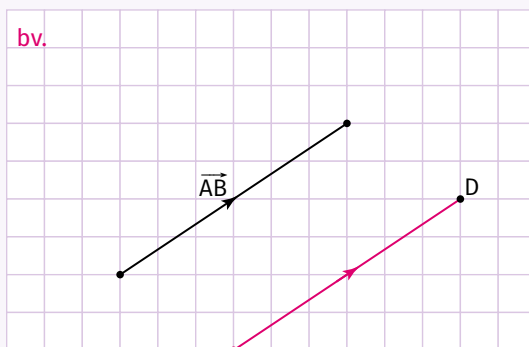
De tegengestelde vector van $\vec{EF}$ is $-\vec{EF} = \vec{FE}$.

De tegengestelde vector van $\vec{CD}$ is $-\vec{CD} = \vec{DC}$.

De tegengestelde vector van $\vec{EF}$ is $-\vec{EF} = \vec{FE}$.

6

Teken telkens de vertegenwoordiger van de vector $\vec{AB}$ die het punt D als eindpunt heeft.



7

Hieronder werd de vector $\vec{v}$ getekend. Teken een vector $\vec{u}$ die voldoet aan:

- dezelfde richting als $\vec{v}$;
- tegengestelde zin als $\vec{v}$;
- $||\vec{u}|| = 3||\vec{v}||$.

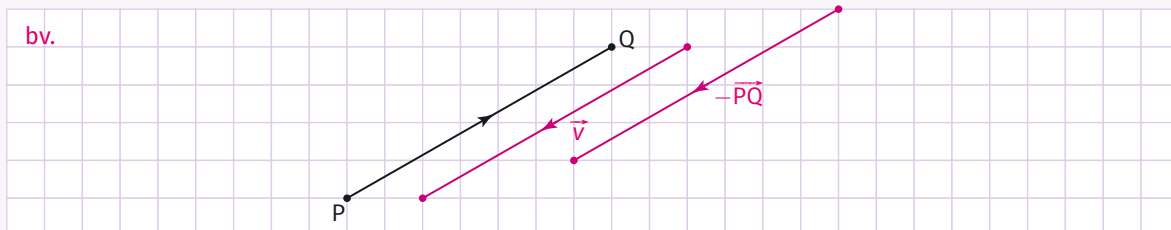
bv.



8

Teken twee vertegenwoordigers van de vector $-\vec{PQ}$.

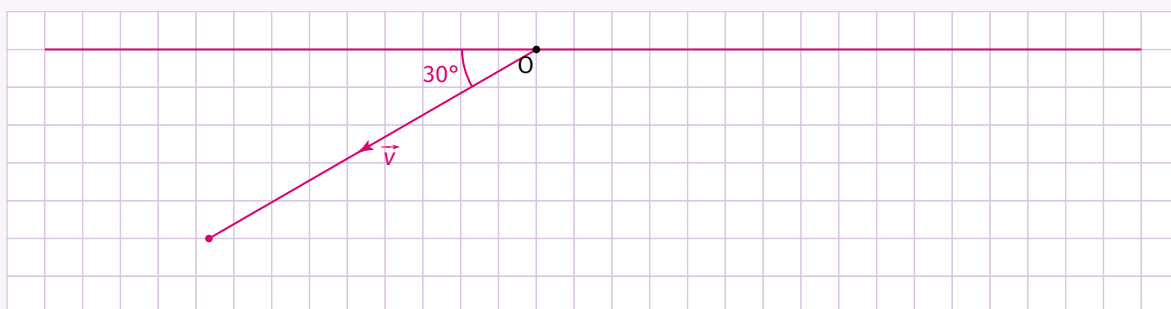
bv.



9

Teken de vector $\vec{v}$ die

- het punt O als beginpunt heeft;
- naar linksonder wijst;
- een hoek van 30° met de horizontale maakt;
- $||\vec{v}|| = 5$ waarbij als lengte-eenheid 1 cm werd gebruikt.

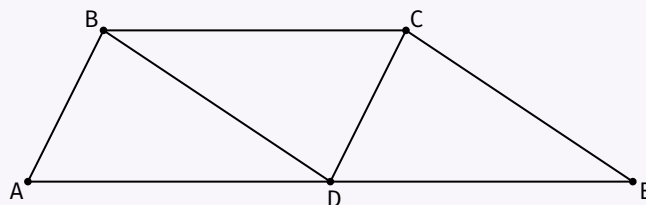


10

Gegeven: A, B, C en D zijn de hoekpunten van een parallellogram en $BD \parallel CE$.

Gevraagd: Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\vec{AD} = \vec{BC}$ | d) $\vec{BC} = \vec{DE}$ |
| b) $\vec{AB} = \vec{DC}$ | e) $\vec{EC} = \vec{BD}$ |
| c) $\vec{AB} = \vec{CD}$ | f) $\vec{AD} = \vec{DE}$ |



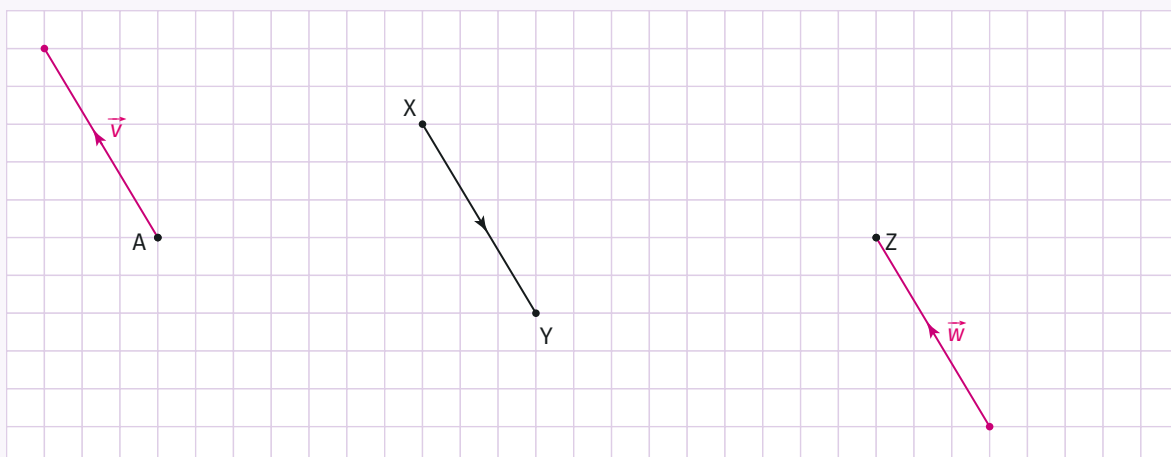
Antwoord: De uitspraken a, b, d en f zijn waar.



11

Teken telkens een vertegenwoordiger van de vector $-\vec{XY}$ met ...

- beginpunt A;
- eindpunt Z.



12

Noem een vector die gelijk is aan zijn tegengestelde vector. Zijn er meerdere oplossingen?

Enkel de nulvector is een vector die gelijk is aan zijn tegengestelde vector.



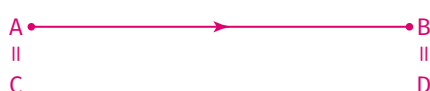
13

Wat kun je met zekerheid zeggen als je weet dat $\vec{AB} = \vec{CD}$ en $A = C$?

Er zijn meerdere antwoorden mogelijk.

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $AB = CD$ | e) $\vec{AC} = \vec{BD}$ |
| b) $AB \parallel CD$ | f) $ \vec{AB} = \vec{CD} $ |
| c) de vierhoek ABCD is een parallellogram | g) $ \vec{AB} = \vec{DC} $ |
| d) de vierhoek ABCD is een rechthoek | h) $ \vec{AD} = \vec{CB} $ |

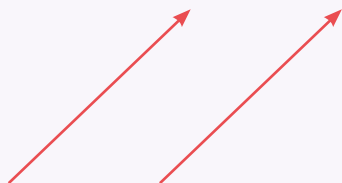
a, b, e, f, g en h



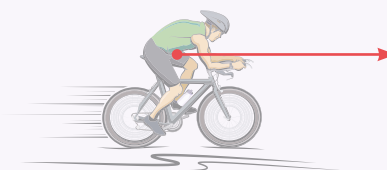
14



Vectoren in de wiskunde mag je evenwijdig met zichzelf verschuiven en hebben geen aangrijpingspunt. Dat zijn 'vrije' vectoren. De vectoren in de fysica hebben dezelfde eigenschappen als de vectoren in de wiskunde, maar ze hebben wel een aangrijpingspunt (= het voorwerp waar die vector bij hoort). Daarom noemt men dat 'gebonden' vectoren.



vrije vectoren



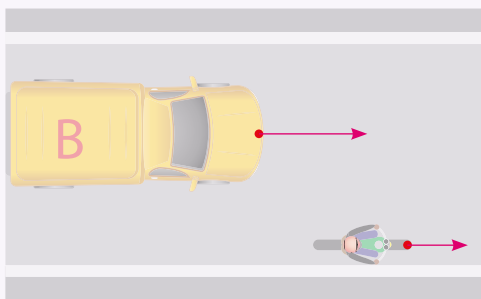
gebonden vector

Snelheid en kracht zijn vectoriële grootheden omdat zij een grootte, een richting, een zin en een aangrijpingspunt hebben. Teken op onderstaande foto's de snelheidsvector van het voorwerp in het aangrijpingspunt (rode punt).

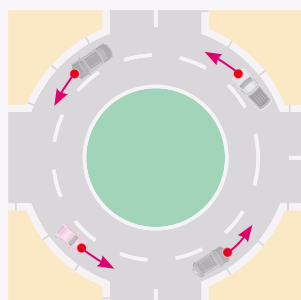
Hebben de snelheidsvectoren dezelfde grootte, richting, zin en aangrijpingspunt?



De twee reizigers bewegen met dezelfde snelheid, in dezelfde richting en in dezelfde zin.



De bestelwagen (B) haalt de bromfietser in. De snelheid van de bestelwagen is groter dan die van de bromfiets. Ze bewegen allebei in dezelfde richting en zin.



Op de rotonde is de snelheid van alle auto's ongeveer even groot. De richting waarin ze bewegen is verschillend.



De liftcabines hebben een even grote snelheid. Ze hebben dezelfde bewegingsrichting, maar bewegen in tegengestelde zin.





Tijdens een schattenjacht moet de ploeg van Peter opdrachten uitvoeren om de plaats van de schat te weten te komen. Na elke gelukte opdracht krijgen ze een kaartje met informatie. Als ze denken te weten waar de schat ligt, moeten ze die zo snel mogelijk opsporen.

Om de schat te vinden, moet de ploeg van Peter niet alleen de juiste afstand (verplaatsing) afleggen, maar ook in de juiste richting en zin lopen.

Zo'n grootte is een vectoriële grootte. Verplaatsing en snelheid zijn voorbeelden van vectoriële grootheden.



Na de eerste gelukte opdracht krijgen ze een kaartje één:

JE VINDT DE SCHAT ALS JE
5 MINUTEN RECHTDOOR
LOOPT AAN 30 KM/H.

Annelies denkt: 'Oei, maar zo snel kan ik niet lopen!'

Peter denkt na en zegt daarop: 'Dat is geen probleem!'

Waarom niet? Je kunt de afstand berekenen en je hoeft dus geen 30 km/h te lopen!

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_g \cdot \Delta t = 30 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ min} = \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ min}} \cdot 5 \text{ min} = 2,5 \text{ km}$$

Weten ze met dat kaartje genoeg om de schat snel te kunnen vinden?

Nee, ze kennen wel de afstand van het vertrekpunt (2,5 km), maar niet de richting.

Het tweede kaartje zegt:

DE SCHAT BEVINDT ZICH
OP DE NZ-MERIDIAAN.

Weten ze nu genoeg om te vertrekken?

Nee, het kan noord OF zuid zijn.

Na de derde gelukte opdracht krijgen ze een kaartje drie:

OM DE SCHAT TE VINDEN, MOET
JE NOORDWAARTS GAAN.

Toon aan dat ze nu genoeg weten om te kunnen vertrekken.

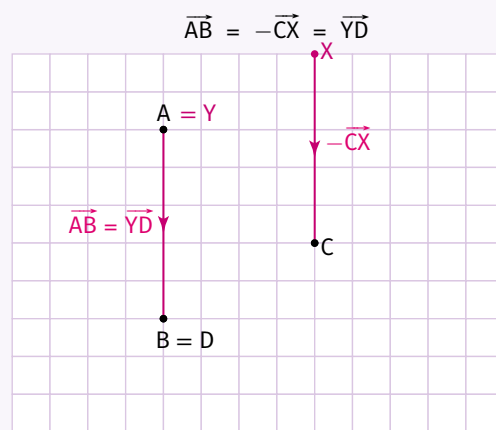
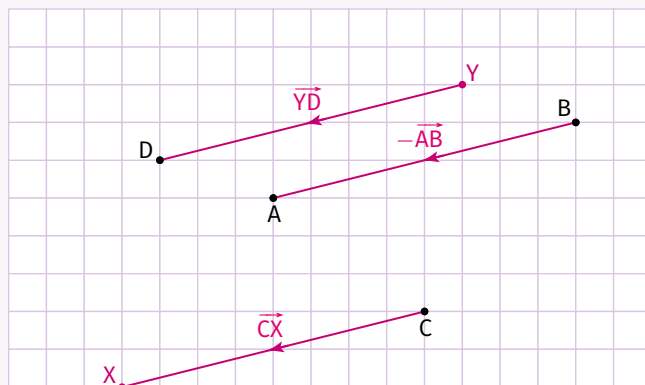
Ija, de schat ligt op 2,5 km in het noorden.



16

Teken de punten X en Y zodat ...

$$-\vec{AB} = \vec{CX} = \vec{YD}$$



17

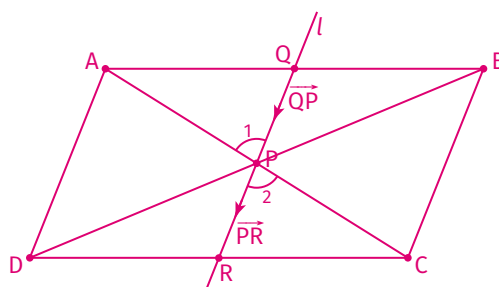
Gegeven: parallellogram ABCD (de hoekpunten worden in wijzerzin benoemd)
P is het midden van [AC]
Door P trekt met een rechte l die evenwijdig is met AD
 l en AB snijden elkaar in het punt Q
 l en CD snijden elkaar in punt R

Te bewijzen: $\vec{QP} = \vec{PR}$



TIP Maak een tekening en toon eerst aan dat $\vec{QP}$ en $\vec{PR}$ dezelfde richting en zin hebben. Toon vervolgens aan dat $|\vec{QP}| = |\vec{PR}|$. Zoek hiervoor naar twee congruente driehoeken met als overeenkomstige zijden [QP] en [PR]. Toon tenslotte de congruentie van deze twee driehoeken aan.

Bewijs:



- $\vec{QP}$ en $\vec{PR}$ hebben dezelfde richting want ze liggen op l . Ze hebben ook dezelfde zin (zie tekening).
- In $\triangle AQP$ en $\triangle CPR$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \quad (\text{overstaande hoeken}) \\ |\vec{AP}| = |\vec{PC}| \quad (\text{def. midden}) \\ \hat{A} = \hat{C} \quad (\text{verwisselende binnenhoeken bij } AB \parallel DC \text{ en snijlijn } AC) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{HZH}} \triangle AQP \cong \triangle CPR$$

(overeenkomstige zijden bij congruente $\triangle$ -en)

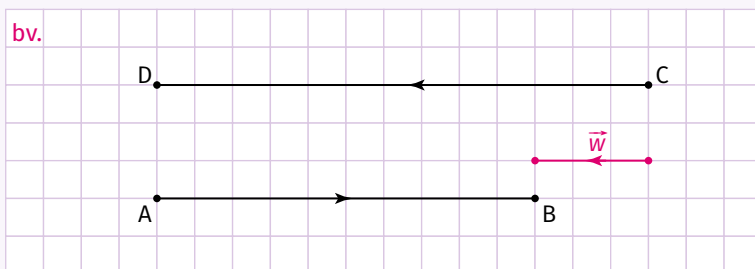
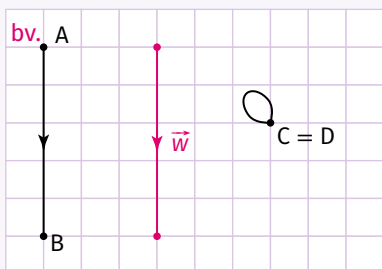
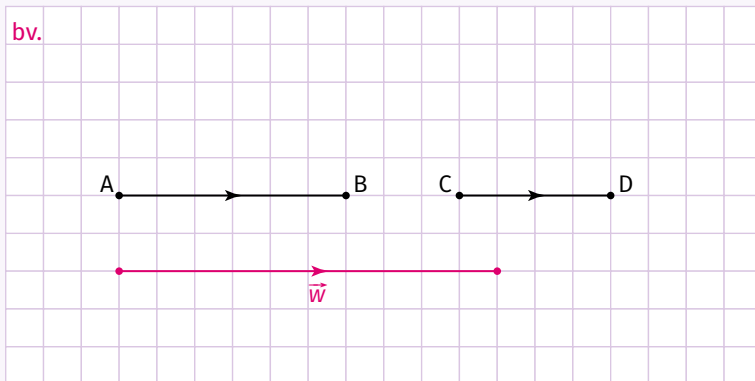
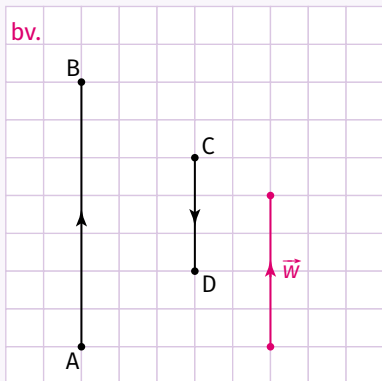
$$|\vec{QP}| = |\vec{PR}|$$

- Hieruit volgt: $\vec{QP} = \vec{PR}$



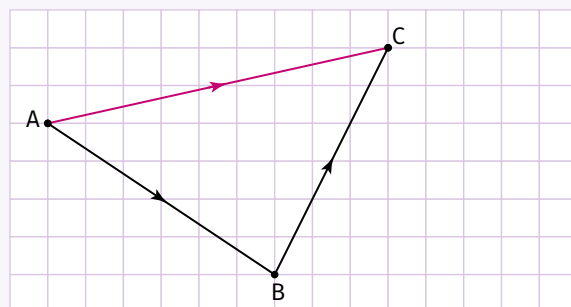
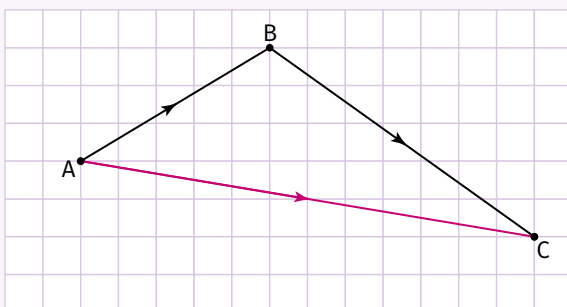
18

Teken in elk van de volgende gevallen een vertegenwoordiger van de vector $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{CD}$.



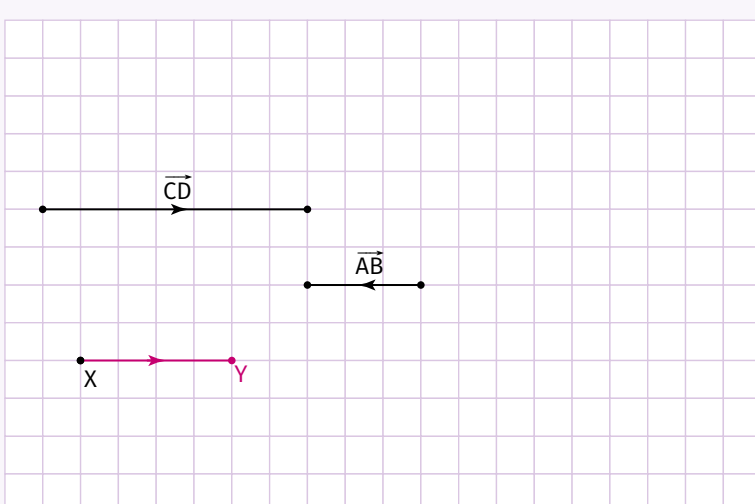
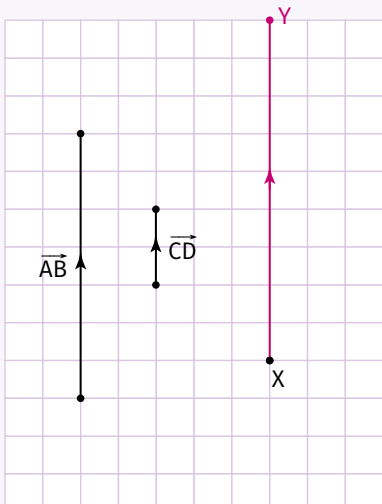
19

Teken de somvector van de vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{BC}$.



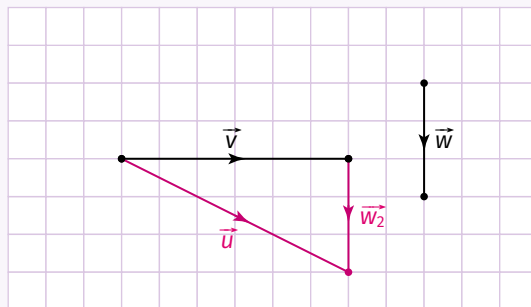
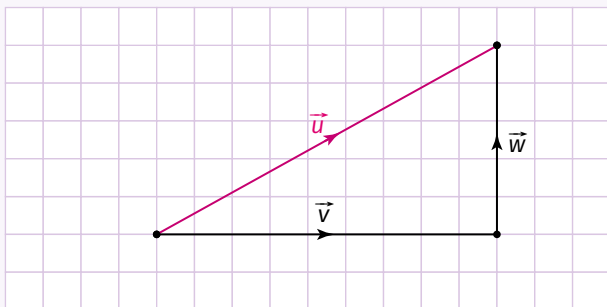
20

Teken telkens de vector $\vec{XY} = \vec{AB} + \vec{CD}$.



21

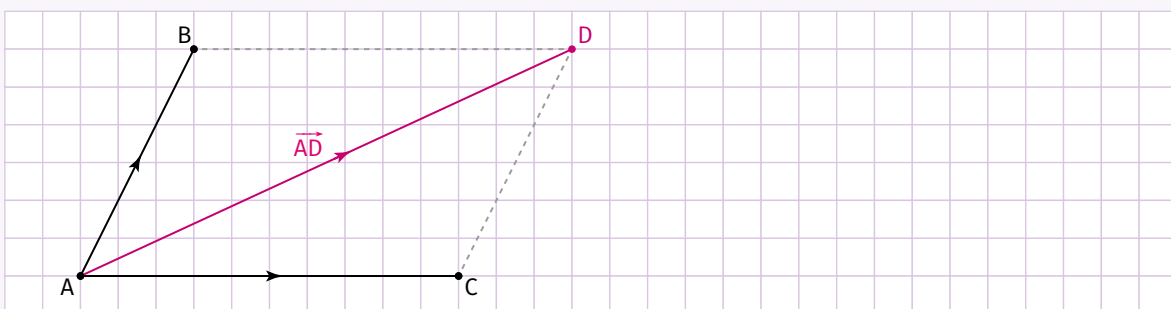
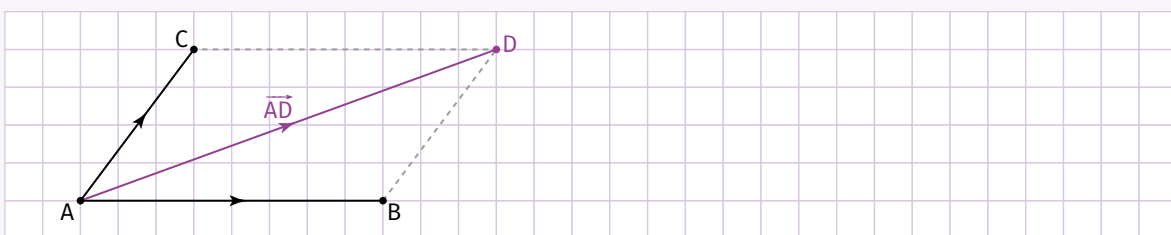
Hieronder zijn de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ getekend. Teken de somvector $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.



22

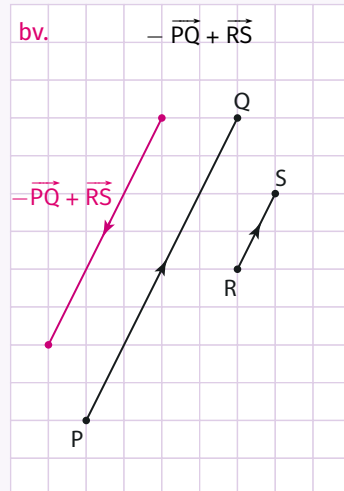
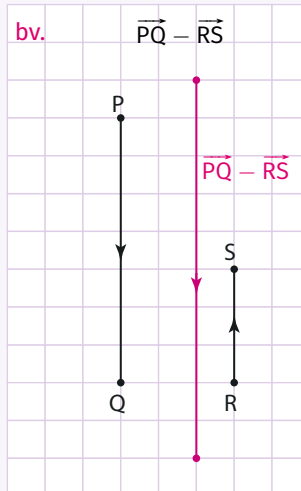
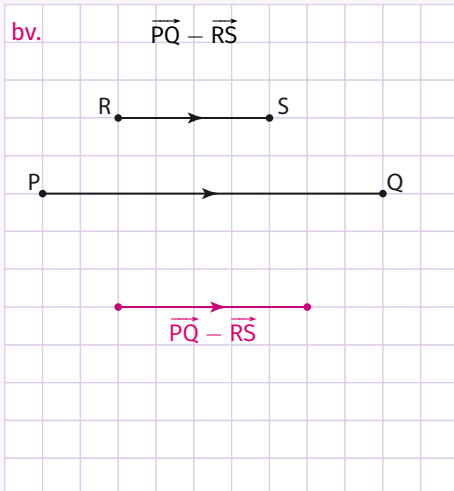
Teken de vector $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ met behulp van de parallellogramregel zoals in het voorbeeld.

Voorbeeld



23

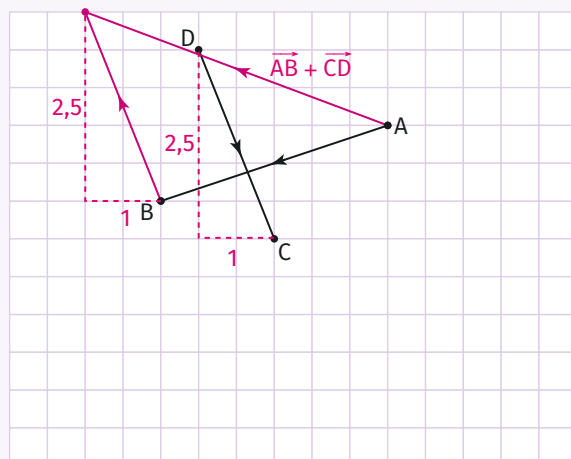
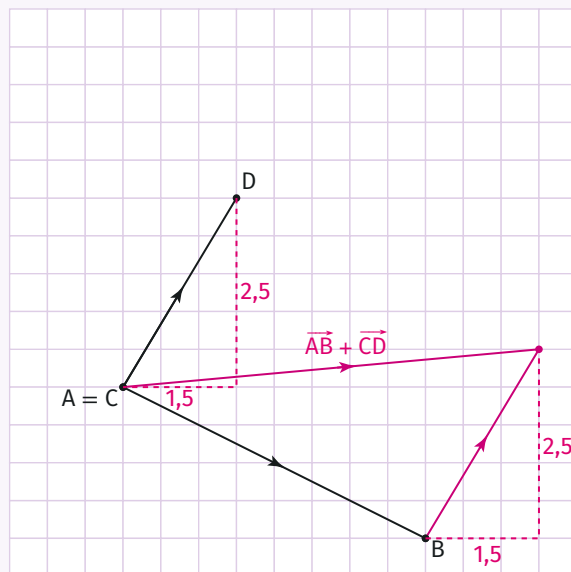
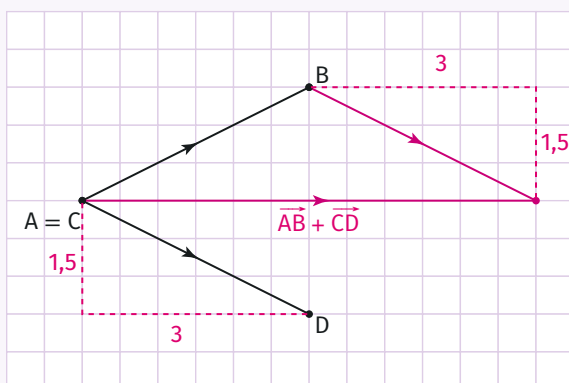
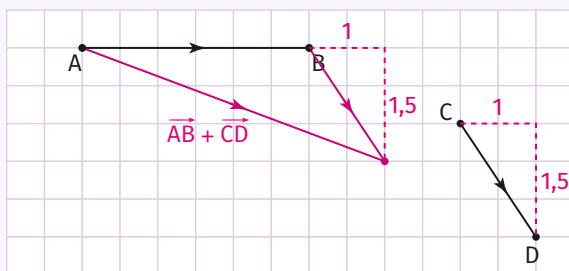
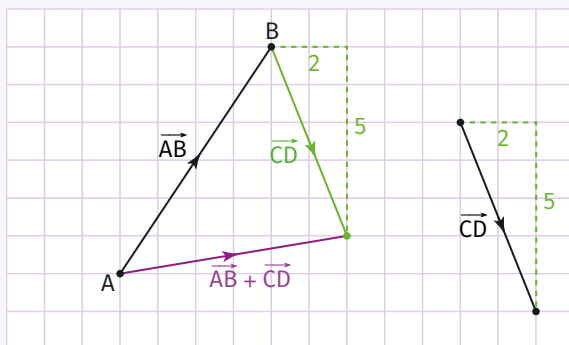
Teken telkens een vertegenwoordiger van de gevraagde vector.



24

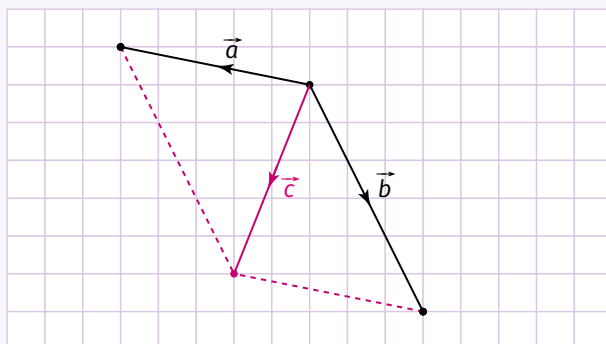
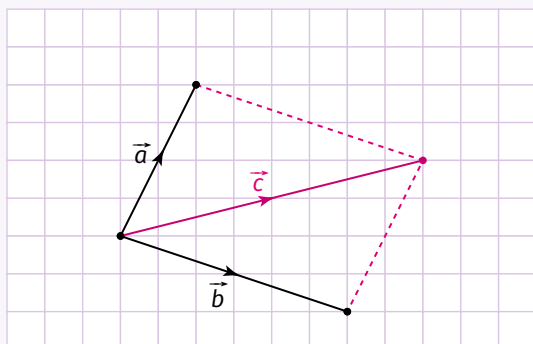
Teken in elk van de volgende gevallen de vertegenwoordiger van de vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ die het punt A als beginpunt heeft. Bekijk het opgeloste voorbeeld.

Voorbeeld



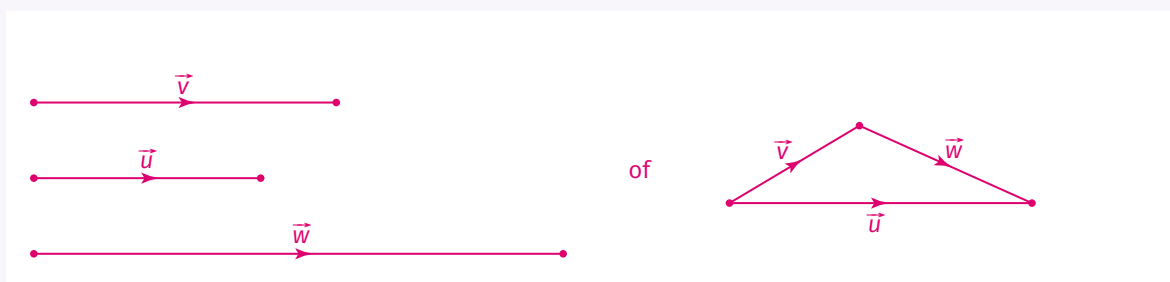
25

Teken de vector $\vec{c}$ zodat $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Gebruik de parallellogramregel.



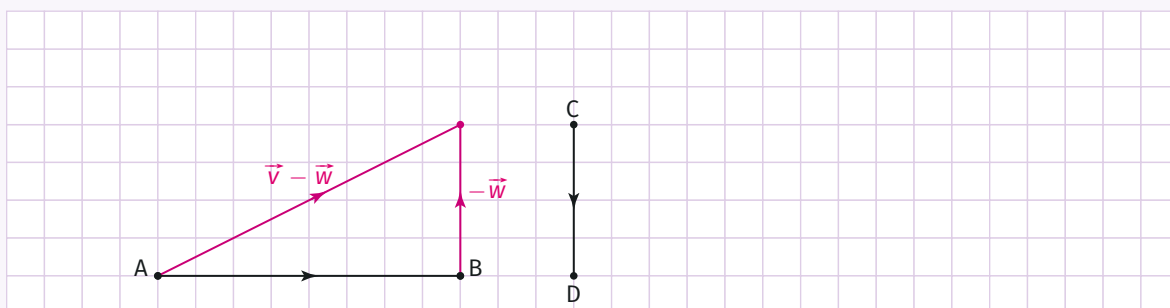
26

Teken twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{u}$, verschillend van de nulvector, waarvan de som $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ een horizontale richting heeft.



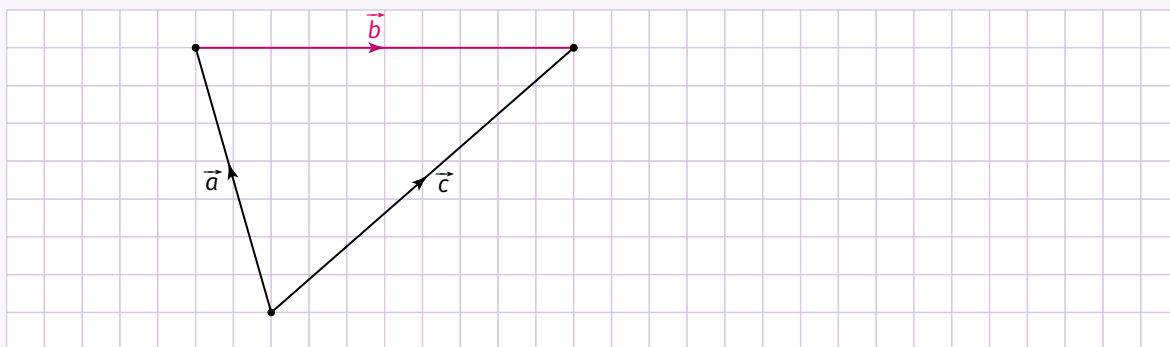
27

Stel $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ en $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$. Teken de vector $\vec{v} - \vec{w}$.



28

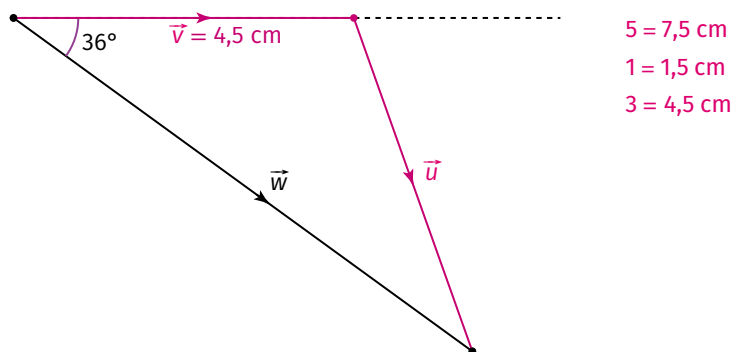
Teken $\vec{b}$ als je weet dat $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



29

Hieronder is de vector $\vec{w}$ getekend. Er wordt gegeven dat $||\vec{w}|| = 5$.
Construeer twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{u}$, zodat $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ en $||\vec{v}|| = 3$.

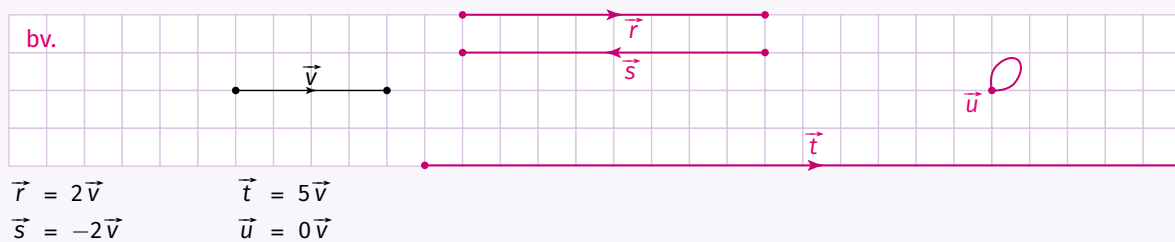
bv.



30

Hieronder werd de vector $\vec{v}$ getekend. Teken de gevraagde vectoren.

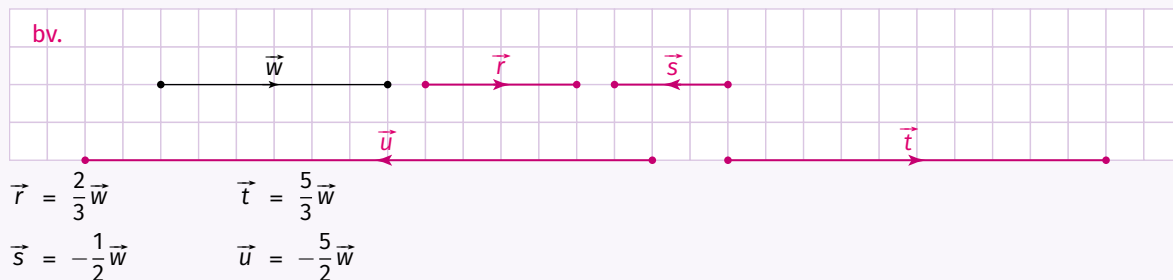
bv.



31

Hieronder werd de vector $\vec{w}$ getekend. Teken de gevraagde vectoren.

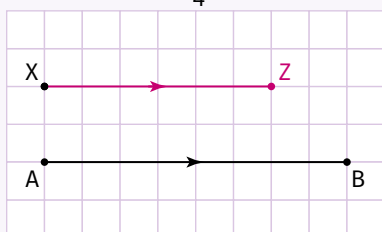
bv.



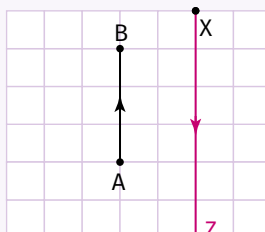
32

Teken telkens het punt Z zodat ...

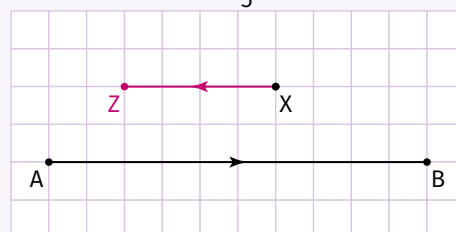
$$\vec{XZ} = \frac{3}{4} \cdot \vec{AB}$$



$$\vec{XZ} = -2\vec{AB}$$



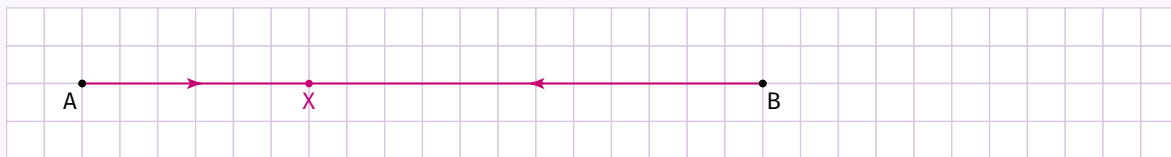
$$\vec{XZ} = -\frac{2}{5}\vec{AB}$$



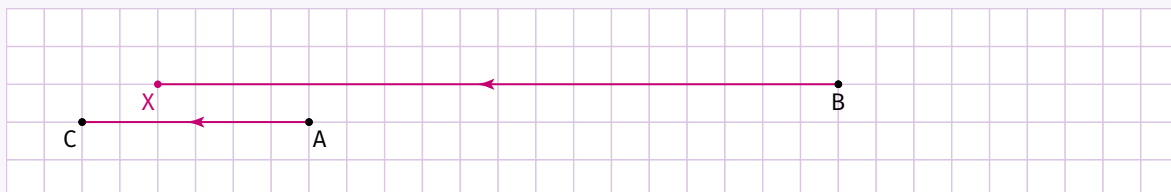
33

Teken het punt X zodat ...

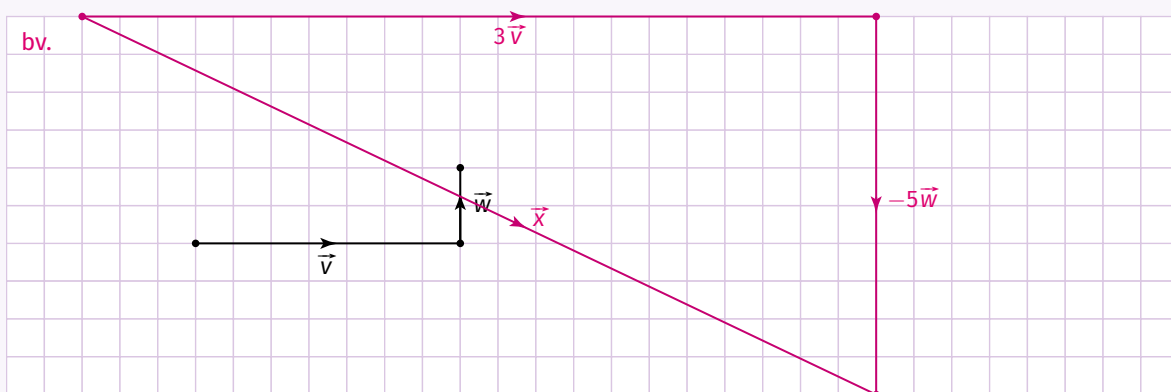
$$\vec{BX} = -2 \cdot \vec{AX}$$



$$\vec{BX} = 3 \cdot \vec{AC}$$



34

Teken de vector $\vec{x} = 3\vec{v} - 5\vec{w}$.

35

Schrijf de volgende vectoren als een product van de vector $\vec{AB}$ met een rationaal getal.

$$\vec{AU} = \dots$$

$$\vec{WA} = \dots$$

$$\vec{AV} = \dots$$

$$\vec{VB} = \dots$$

$$\vec{AX} = \dots$$

$$\vec{UW} = \dots$$

$$\vec{AU} = \frac{1}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{WA} = \frac{3}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{AV} = \frac{4}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{VB} = \frac{1}{5}\vec{AB}$$

$$\vec{AX} = -\frac{7}{5}\vec{AB}$$

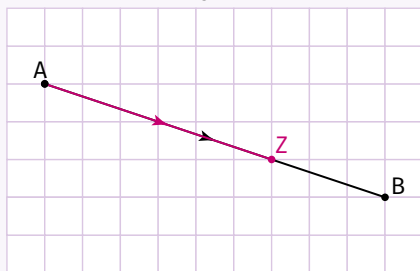
$$\vec{UW} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$$



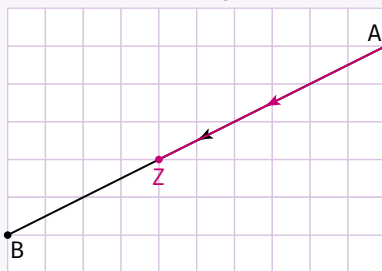
36

Teken telkens het punt Z zodat ...

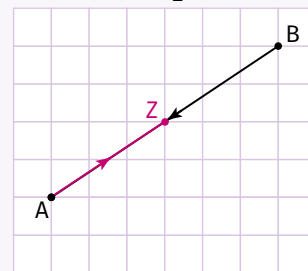
$$\vec{AZ} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AB}$$



$$\vec{AZ} = \frac{3}{5} \cdot \vec{AB}$$



$$\vec{AZ} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{BA}$$



37

Vul het gepaste getal in zodat de uitspraak waar is:

$$\vec{PQ} = -5 \cdot \vec{RS} \implies [\text{PQ}] \text{ is } \dots \text{ maal zo lang als } [\text{RS}]$$

$$\vec{PQ} = -5 \cdot \vec{RS} \implies [\text{PQ}] \text{ is } \mathbf{5} \text{ maal zo lang als } [\text{RS}]$$



38

Welk verband kan er bestaan tussen $\vec{PQ}$ en $\vec{RS}$ als je weet dat [PQ] driemaal zolang is als [RS]?

$$\vec{PQ} = 3 \cdot \vec{RS} \text{ of } \vec{PQ} = -3 \cdot \vec{RS}$$



39

Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar?

a) $\vec{CD} = (-3) \cdot \vec{AB} \implies AB \parallel CD$

b) $AB \parallel CD \implies \vec{CD} = (-3) \cdot \vec{AB}$

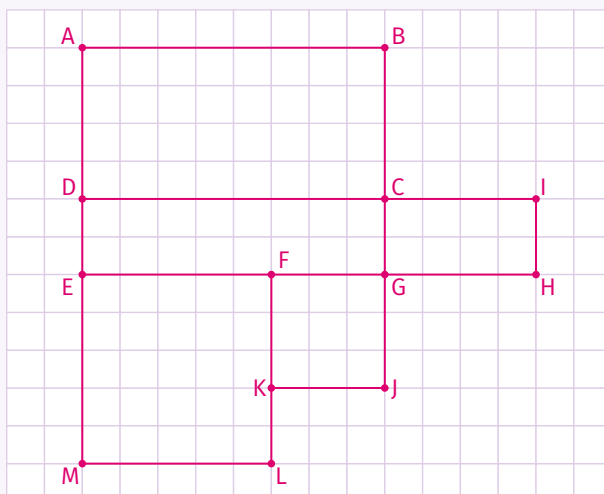
a) waar

b) onwaar



40

Vul het juiste rationaal getal in.



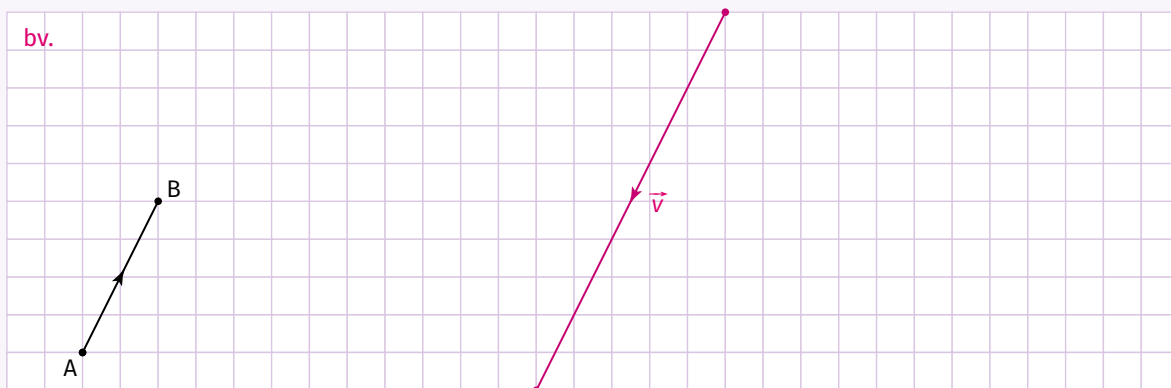
$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \dots \vec{GH} \\ \vec{AD} &= \dots \vec{BJ} \\ \vec{FK} &= \dots \vec{EA} \\ \vec{DC} &= \dots \vec{KJ} \\ \vec{LF} &= \dots \vec{HI} \\ \vec{LM} &= \dots \vec{DI} \\ \vec{EF} &= \dots \vec{LM} \\ \vec{KG} &= \dots \vec{MF} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \mathbf{2} \vec{GH} \\ \vec{AD} &= \mathbf{\frac{4}{9}} \vec{BJ} \\ \vec{FK} &= \mathbf{-\frac{1}{2}} \vec{EA} \\ \vec{DC} &= \mathbf{\frac{8}{3}} \vec{KJ} \\ \vec{LF} &= \mathbf{2,5} \vec{HI} \\ \vec{LM} &= \mathbf{-\frac{5}{12}} \vec{DI} \\ \vec{EF} &= \mathbf{-} \vec{LM} \\ \vec{KG} &= \mathbf{\frac{3}{5}} \vec{MF} \end{aligned}$$



41

Construeer $\vec{v}$ zodat $\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{AB}$.



42

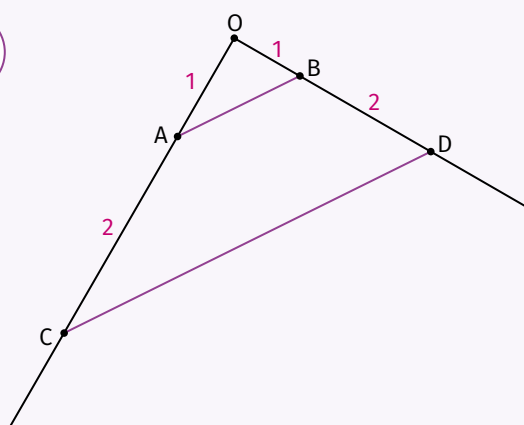
Vul aan.

$$\vec{PQ} = -\frac{3}{8} \cdot \vec{RS} \implies |\vec{RS}| = \dots |\vec{PQ}|$$

$$\vec{PQ} = -\frac{3}{8} \cdot \vec{RS} \implies |\vec{RS}| = \frac{8}{3} |\vec{PQ}|$$



43



Gegeven: $AB \parallel CD$
 $\vec{OC} = 3\vec{OA}$

Vul het juiste getal in:

$$\begin{aligned}\vec{CO} &= \dots \vec{OA} \\ ||\vec{CO}|| &= \dots ||\vec{OA}|| \\ \vec{AC} &= \dots \vec{OA} \\ \vec{OD} &= \dots \vec{OB} \\ \vec{AB} &= \dots \vec{CD}\end{aligned}$$

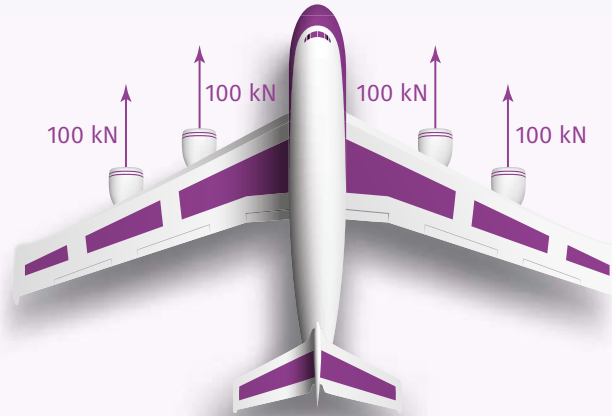
$$\begin{aligned}\vec{CO} &= -3 \vec{OA} \\ ||\vec{CO}|| &= 3 ||\vec{OA}|| \\ \vec{AC} &= 2 \vec{OA} \\ \vec{OD} &= 3 \vec{OB} \\ \vec{AB} &= \frac{1}{3} \vec{CD}\end{aligned}$$



44



Een lijnvliegtuig heeft 4 straalmotoren ('jet engines'). Elke motor produceert een voorwaartse kracht van 100 kN (kN staat voor kilonewton, 1 kN = 1000 N). Bepaal de grootte van de resulterende kracht.



$$4 \cdot 100 \text{ kN} = 400 \text{ kN}$$

Antwoord: De resulterende kracht van de 4 straalmotoren is 400 kN.



45

Een appel valt van de boom. Beschouw de beweging van de appel. Beschrijf ...

- de richting van de snelheid van de appel.
- de zin van de snelheid van de appel.
- de grootte van de snelheid van de appel.

- De richting van de snelheid is verticaal.
- De zin van de snelheid is naar beneden.
- De grootte van de snelheid neemt alsmaar toe.



46



Wat is de nettokracht op een doos die naar links geduwd wordt met een kracht van 40 N en naar rechts geduwd wordt met een kracht van 10 N? Geef de grootte, richting en zin van de nettokracht.



- De grootte van de nettokracht is 30 N.
- De richting van de nettokracht is horizontaal.
- De zin van de nettokracht is naar links.



47



Twee kinderen duwen samen een slee vooruit. Het ene kind duwt met een horizontale kracht van 80 N. Het andere kind duwt met een horizontale kracht van 140 N. De wrijvingskracht tussen de slee en de sneeuw bedraagt 60 N. Bepaal de nettokracht op de slee.



$$140 \text{ N} + 80 \text{ N} = 220 \text{ N}$$

$$220 \text{ N} - 60 \text{ N} = 160 \text{ N}$$

Antwoord: De nettokracht op de slee is 160 N.



48

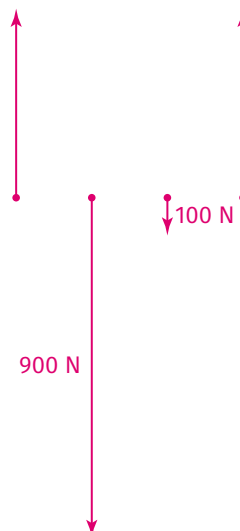


Een glazenwasser zit in het midden van een stelling. Op de stelling werken er verschillende krachten:

- de trekkracht in het linkertouw (verticale kracht naar boven)
- de trekkracht in het rechtertouw (verticale kracht naar boven)
- het gewicht van de glazenwasser (verticale kracht naar beneden; 900 N)
- het eigen gewicht van de stelling (verticale kracht naar beneden; 100 N)



De glazenwasser zit in het midden van de stelling zodat de trekkrachten in beide touwen even groot zijn. Bereken de grootte van deze trekkrachten.



$$900 \text{ N} + 100 \text{ N} = 1000 \text{ N}$$

$$1000 \text{ N} : 2 = 500 \text{ N}$$

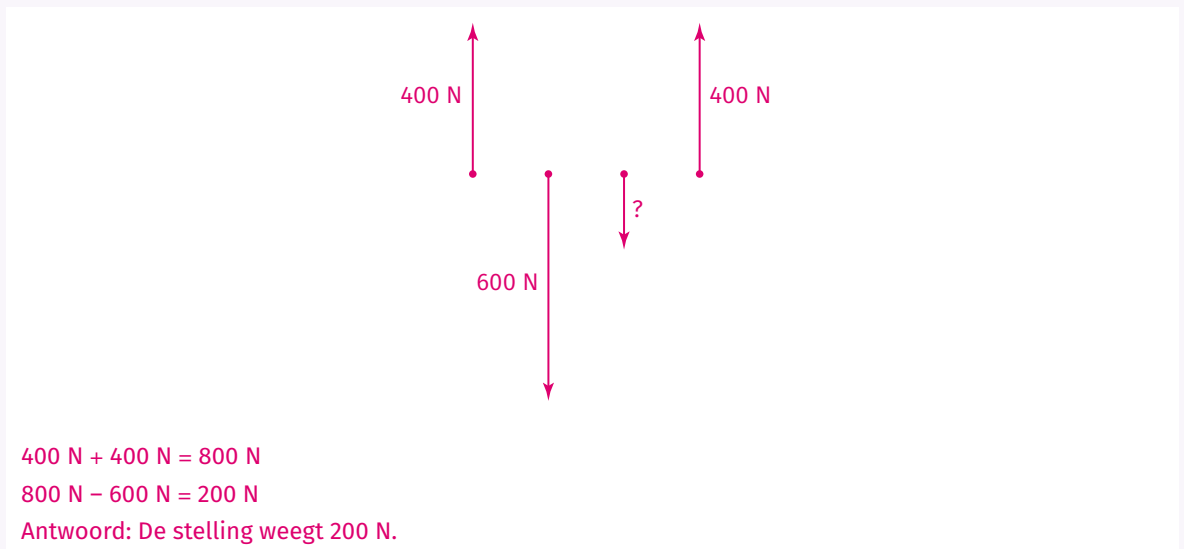
Antwoord: De grootte van de trekkrachten is 500 N.



49



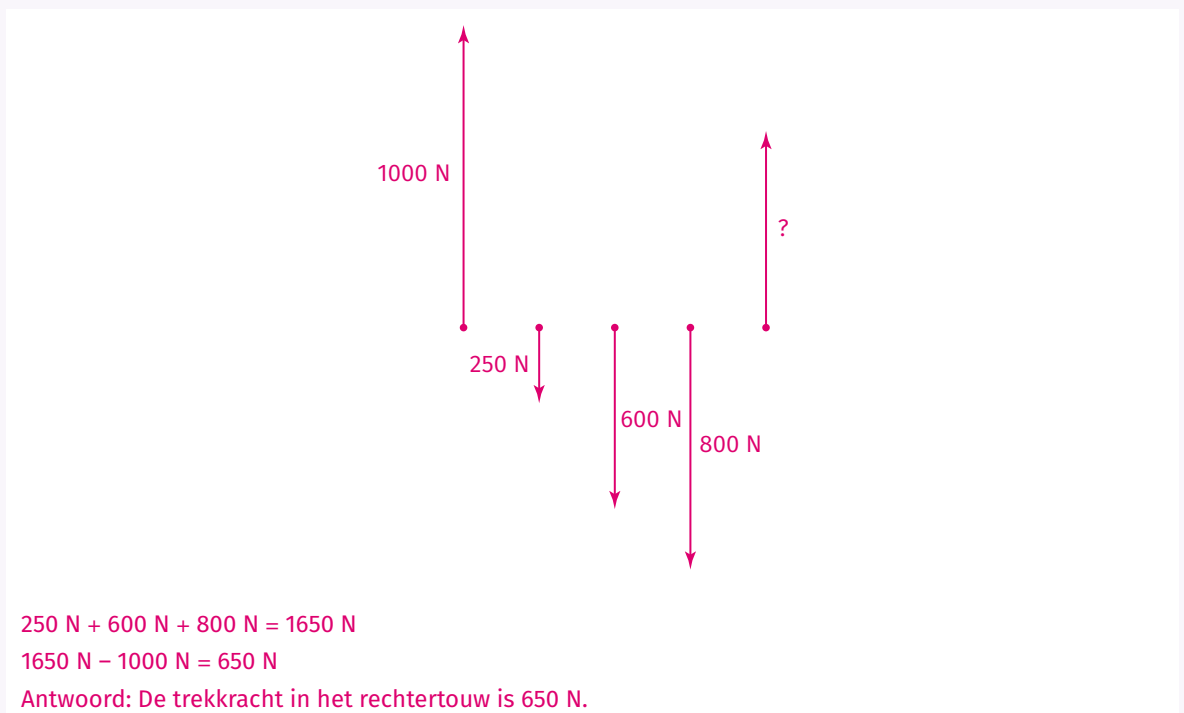
De tekening in de vorige oefening toont een glazenwasser die op een stelling zit. De glazenwasser en de stelling zijn in rust. De glazenwasser weegt 600 N. Elk touw heeft een trekkracht van 400 N. Wat is het gewicht van de stelling?



50



Een stelling weegt 250 N. Op de stelling staan twee glazenwassers. De ene weegt 600 N en de andere weegt 800 N. De trekkracht in het linkertouw bedraagt 1000 N. Hoe groot is de trekkracht in het rechtertouw?



51



Jochen bevindt zich op een trein die met een constante snelheid van 108 km/h oostwaarts rijdt. Hij wandelt in de wagon tegen de rijrichting van de trein in. De relatieve snelheid van Jochen t.o.v. de trein is 1,1 m/s. Bereken de totale snelheid van Jochen t.o.v. de grond. Deze snelheid noemen we de absolute snelheid van Jochen.

$$108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$$

$$1,1 \text{ m/s}$$

$$30 - 1,1 = 28,9$$

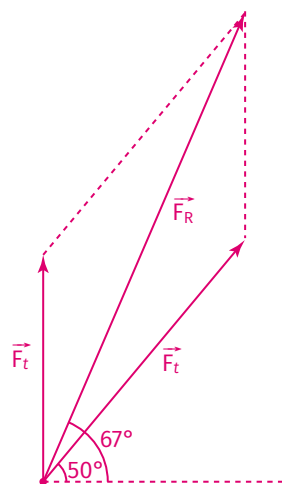
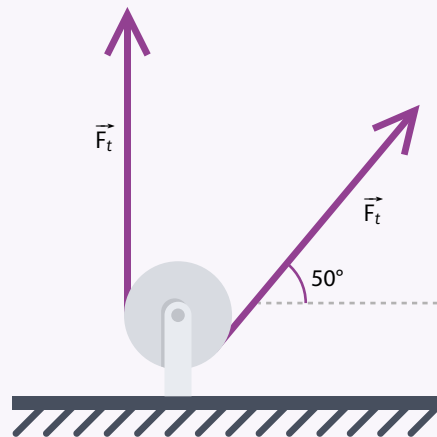
Antwoord: De absolute snelheid van Jochen is 28,9 m/s.



52



Een touw is over een katrol gespannen. De grootte van de trekkracht $\vec{F}_t$ in het touw is 4000 N. Teken met behulp van de parallellogramregel de resultante $\vec{F}_R$ van deze twee trekkrachten. Meet met behulp van je geodriehoek de grootte van $\vec{F}_R$ en de hoek die deze vector maakt met de horizontale.



Antwoord: $\vec{F}_R$ meet 6,5 cm en maakt een hoek van 67° .



53



De y-component van de kracht die een persoon op de moersleutel uitoefent is 300 N. Bepaal de x-component van deze kracht.



$$\begin{array}{lcl} y = 12 & \text{en} & y = 300 \text{ N} \\ x = 5 & \text{en} & x = ? \text{ N} \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 = 300 \text{ N} \\ 5 = 125 \text{ N} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12 = 300 \text{ N} \\ 5 = 125 \text{ N} \end{array}} \right) : 12 \cdot 5$$

Antwoord: De x-component is 125 N.



54



Merel hangt aan een touw. Ze is in rust. Er werken twee krachten op Merel in, namelijk:

- de zwaartekracht $\vec{F}_z$ die naar beneden wijst (grootte: 600 N)
- de trekkracht $\vec{F}_t$ in het touw.

Teken beide krachten op de figuur. Bepaal de grootte, richting en zin van de trekkracht in het touw.



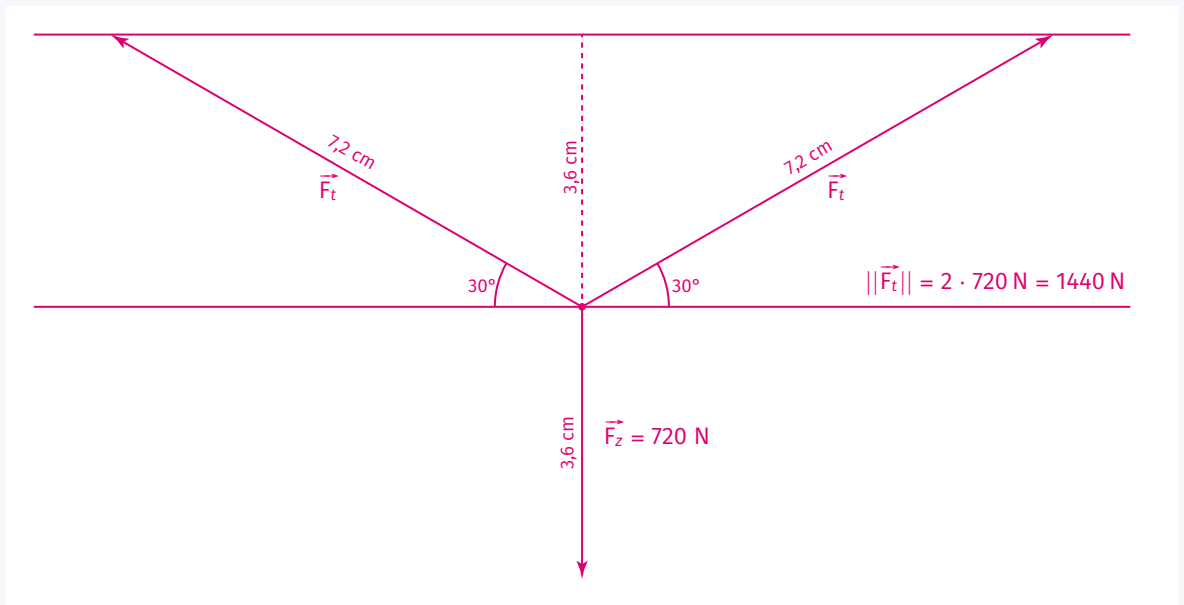
De grootte van de trekkracht in het touw is 600 N.
De richting van de trekkracht in het touw is verticaal.
De zin van de trekkracht in het touw is naar boven.



55



Matthis hangt aan twee identieke touwen. De touwen hangen niet verticaal, maar maken een hoek van 30° met de horizontale. Matthis is in rust. Matthis ondervindt de zwaartekracht $\vec{F}_z$ (grootte: 720 N). De grootte van de trekkracht in beide touwen is gelijk. Teken alle krachten die op Matthis inwerken en meet met je lat de grootte van de trekkracht van elk touw.



56



Een motorboot reist de afstand van 210 km tussen twee havens af in 5 uur als hij stroomafwaarts vaart en in 6 uur als hij stroomopwaarts vaart. De relatieve snelheid van de boot t.o.v. het stromende water blijft constant. Bereken de relatieve snelheid van de boot en de stroomsnelheid van het water.

- absolute snelheid van de boot:

$$\text{stroomopwaarts: } \frac{210 \text{ km}}{6 \text{ h}} = 35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\text{stroomafwaarts: } \frac{210 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 42 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- s_b : relatieve snelheid van de boot

s_w : stroomsnelheid

$$\text{stroomopwaarts: } s_b = 35 + s_w \quad \text{want} \quad s_b - s_w = 35$$

$$\text{stroomafwaarts: } s_b = 42 - s_w \quad \text{want} \quad s_b + s_w = 42$$

$$35 + s_w = 42 - s_w$$

$$2 s_w = 7$$

$$s_w = 3,5$$

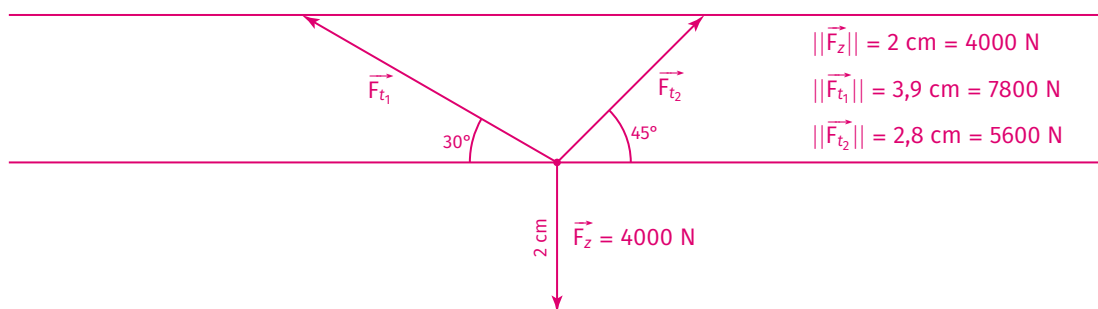
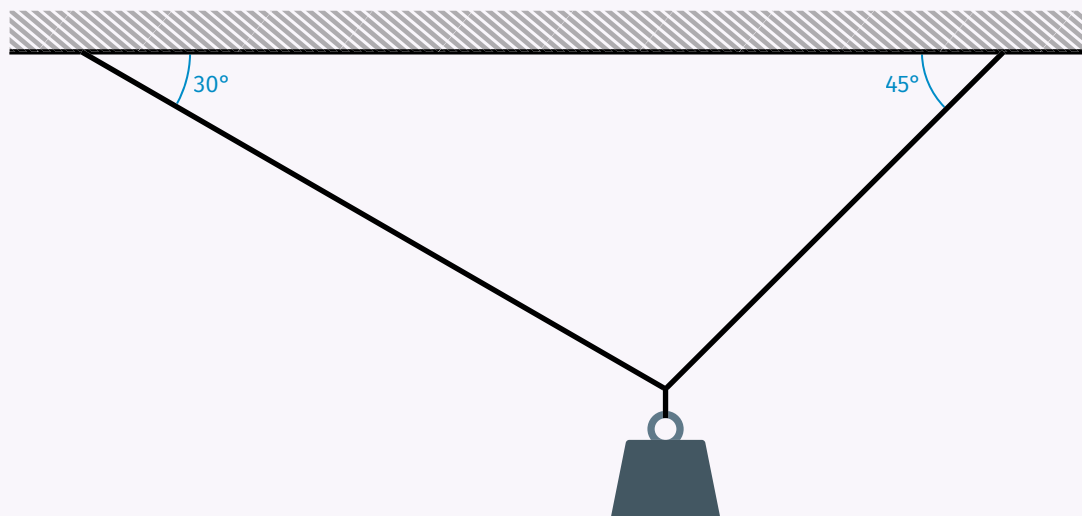
Antwoord: De stroomsnelheid van het water is 3,5 km/h en de relatieve snelheid van de boot is 38,5 km/h.



57

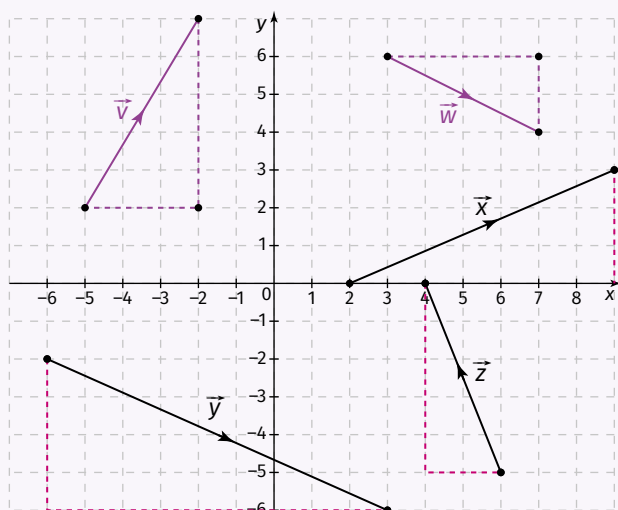


Een zwaar voorwerp hangt aan twee touwen, zoals op de figuur voorgesteld. Het voorwerp heeft een massa van 400 kg, zodat de zwaartekracht op het voorwerp bij benadering gelijk is aan 4000 N. Duid de trekkrachten in beide touwen op een figuur aan en meet met je lat hun grootte. De trekkrachten in beide touwen zijn niet noodzakelijk gelijk.



58

Bepaal de coördinaat van de getekende vectoren.



Voorbeeld

$$\text{co}(\vec{v}) = (3, 5)$$

$$\text{co}(\vec{w}) = (4, -2)$$

$$\text{co}(\vec{x}) = \dots$$

$$\text{co}(\vec{y}) = \dots$$

$$\text{co}(\vec{z}) = \dots$$

$$\text{co}(\vec{x}) = (7, 3)$$

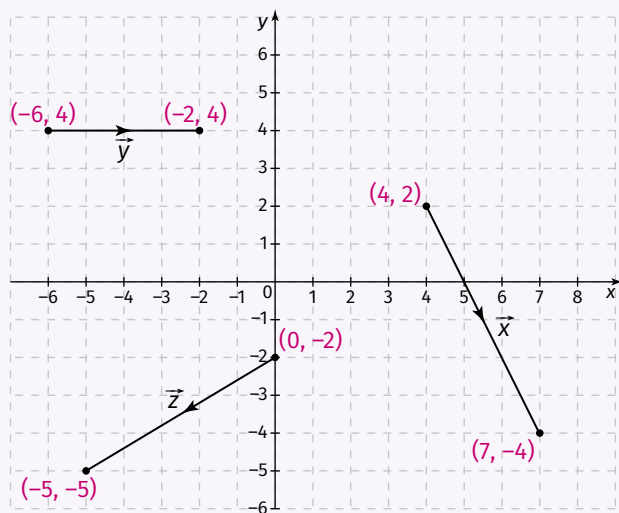
$$\text{co}(\vec{y}) = (9, -4)$$

$$\text{co}(\vec{z}) = (-2, 5)$$



59

Bepaal de coördinaat van de getekende vectoren.



$$\text{co}(\vec{x}) = (7 - 4, -4 - 2) = (3, -6)$$

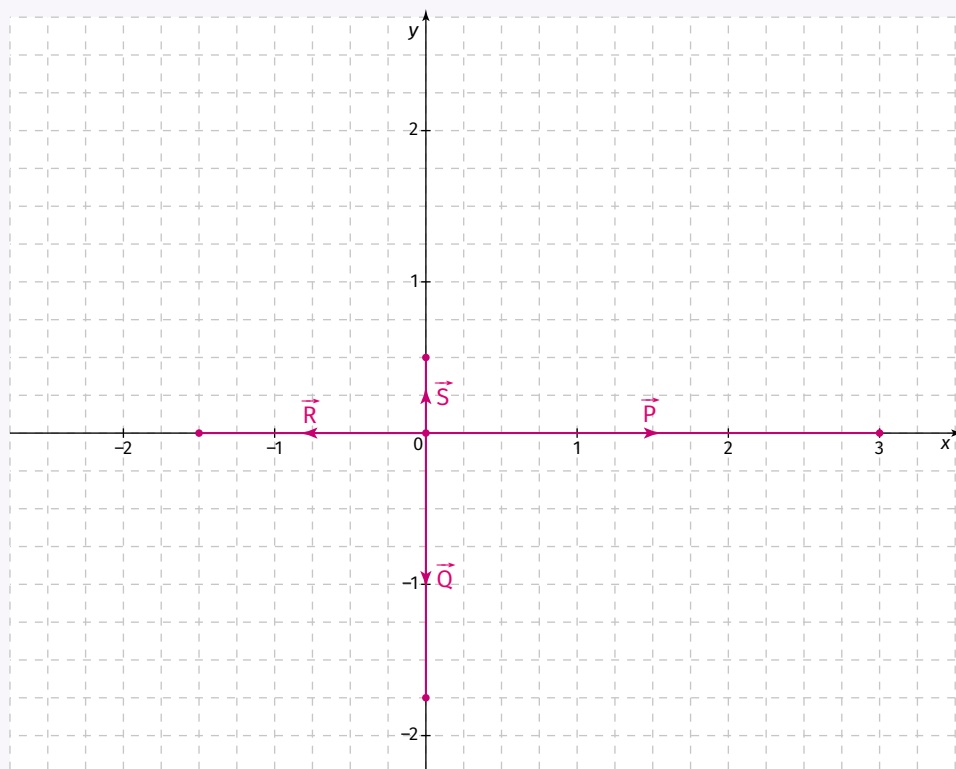
$$\text{co}(\vec{y}) = (-2 + 6, 4 - 4) = (4, 0)$$

$$\text{co}(\vec{z}) = (-5 - 0, -5 + 2) = (-5, -3)$$



60

- Teken een vector $\vec{P}$ die op de x-as ligt en lengte 3 heeft. De vector wijst naar rechts.
- Bepaal de coördinaat van $\vec{P}$.
- Teken een vector $\vec{Q}$ met norm $\|\vec{Q}\| = \frac{7}{4}$ die ligt volgens de y-as. De zin van $\vec{Q}$ is de negatieve zin van de y-as.
- Wat is de coördinaat van $\vec{Q}$?
- Teken de vectoren $\vec{R}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ en $\vec{S}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- Schrap wat niet past: als een vector evenwijdig is met de x-as, dan is het ~~eerste~~/tweede coördinaatgetal van deze vector gelijk aan 0.
- Schrap wat niet past: de vector $\vec{T}(0, -2)$ is evenwijdig met de ~~x-as~~/y-as.
- Wat is de coördinaat van de nulvector $\vec{O}$?



b) $\text{co}(\vec{P}) = (3, 0)$

d) $\text{co}(\vec{Q}) = \left(0, -\frac{7}{4}\right)$

h) $\text{co}(\vec{O}) = (0, 0)$



61

Waar of niet waar?

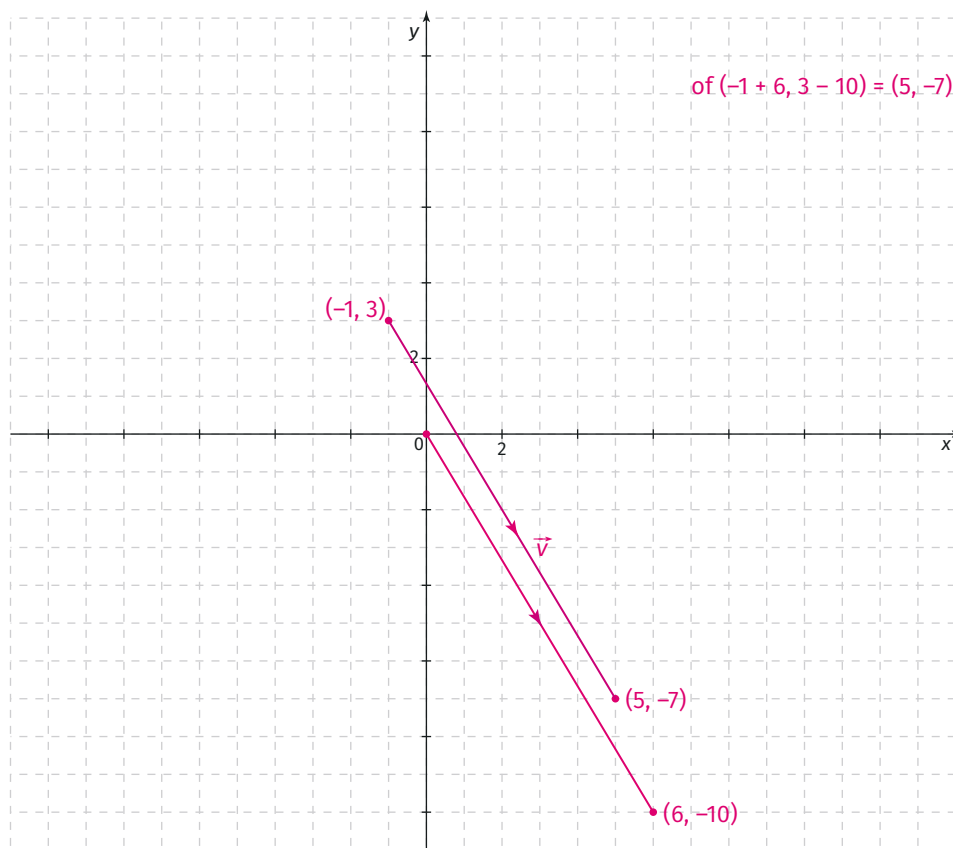
Alle vectoren met als eerste coördinaatgetal 0 hebben een verticale richting.

waar



62

De vector $\vec{v}$ heeft als coördinaat $(6, -10)$. Een vertegenwoordiger van $\vec{v}$ vertrekt vanuit het punt $(-1, 3)$. Wat is de coördinaat van het uiteinde van $\vec{v}$?

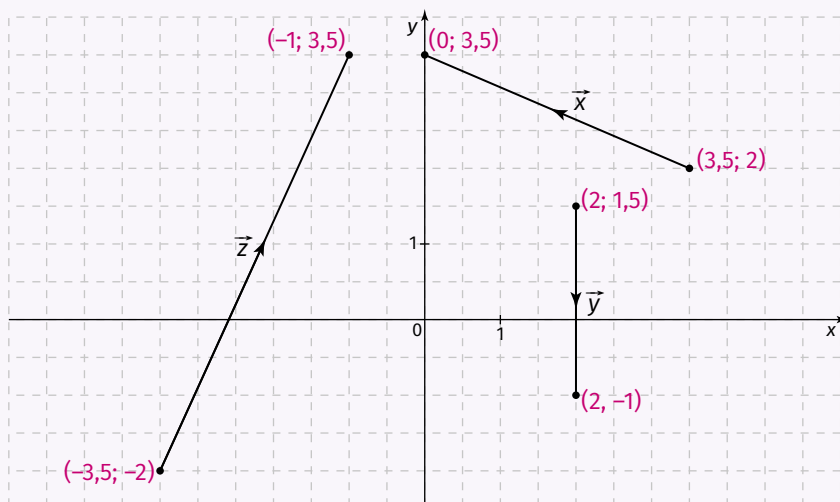


Antwoord: De coördinaat van het uiteinde van $\vec{v}$ is $(5, -7)$.



63

Bepaal de coördinaat van de getekende vectoren.



$$\text{co}(\vec{x}) = (0 - 3,5; 3,5 - 2) = (-3,5; 1,5)$$

$$\text{co}(\vec{y}) = (2 - 2; -1 - 1,5) = (0; -2,5)$$

$$\text{co}(\vec{z}) = (-1 + 3,5; 3,5 + 2) = (2,5; 5,5)$$



64

Voorbeeld M is het midden van [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Vul aan.

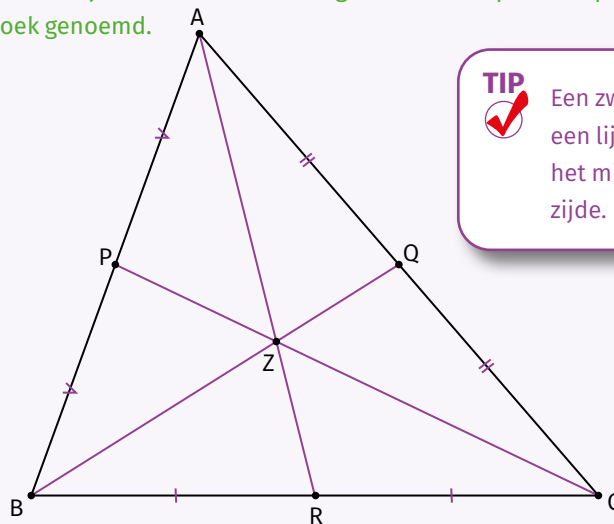
- N is het midden van [CD] $\Leftrightarrow \dots = \dots$
- S is het midden van [PQ] $\Leftrightarrow \dots = \dots$
- $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{RV} \Leftrightarrow \dots$ is het midden van $\dots$
- $\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{DG} \Leftrightarrow \dots$ is het midden van $\dots$

- N is het midden van [CD] $\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND}$
- S is het midden van [PQ] $\Leftrightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SQ}$
- $\overrightarrow{UR} = \overrightarrow{RV} \Leftrightarrow \mathbf{R}$ is het midden van $\mathbf{[UV]}$
- $\overrightarrow{TD} = \overrightarrow{DG} \Leftrightarrow \mathbf{D}$ is het midden van $\mathbf{[TG]}$



65

stelling De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dit punt wordt het zwaartepunt van de driehoek genoemd.



TIP Een zwaartelijne van een driehoek is een lijnstuk door een hoekpunt en het midden van de overstaande zijde.

Veronderstel dat $\text{co}(A) = (x_1, y_1)$, $\text{co}(B) = (x_2, y_2)$ en $\text{co}(C) = (x_3, y_3)$, dan heeft het zwaartepunt Z van $\triangle ABC$ als coördinaat:

$$\text{co}(Z) = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

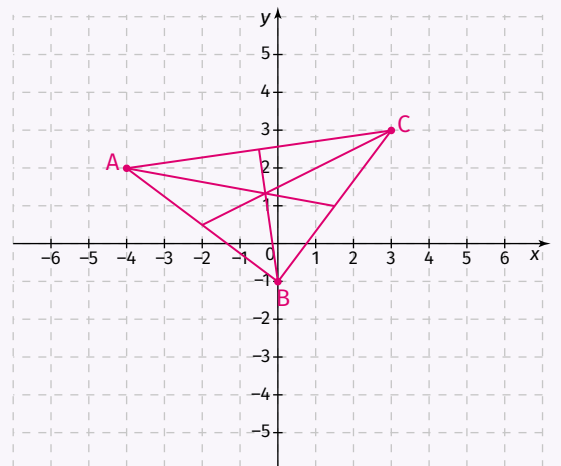
$$\text{co}(Z) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$\vec{Z} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$$

- Bepaal de coördinaat van het zwaartepunt Z van de driehoek met hoekpunten A(-4, 2), B(0, -1) en C(3, 3).
- Teken de driehoek samen met de drie zwaartelijnen. Klopt je berekening met je tekening?

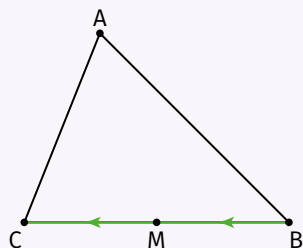
$$\begin{aligned} \text{co}(Z) &= \left(\frac{-4 + 0 + 3}{3}, \frac{2 - 1 + 3}{3} \right) \\ &= \left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

De berekening en de tekening komen overeen.



66

Gegeven: $\triangle ABC$
M is het midden van [BC]



Gevraagd:

- Druk het gegeven met behulp van vectoren uit:
M is het midden van $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \dots = \dots$
- Duid op de figuur de gelijke vectoren met groen aan.
- Vervang de sommen van vectoren door één enkele vector.
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \dots$
 - $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \dots$
 - $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \dots$
 - $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \dots$



TIP Voorbeeld

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

a) M is het midden van $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$

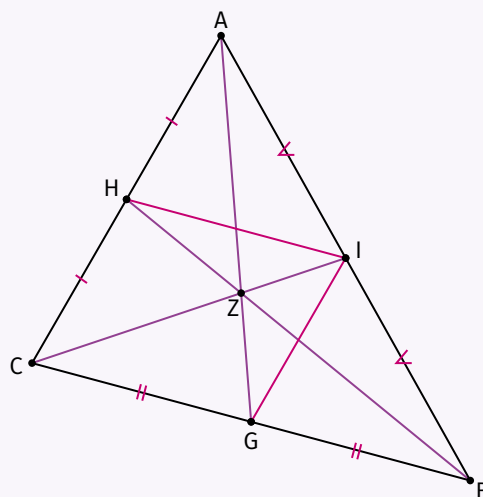
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$
 - $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA}$
 - $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$

67

Gegeven: $\triangle ABC$
AG, BH en CI zijn zwaartelijnen
Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$

Gevraagd: Vul het juiste rationale getal in.

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{HI} = \dots \overrightarrow{CB}$ | a) $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$ |
| b) $\overrightarrow{HI} = \dots \overrightarrow{GB}$ | b) $\overrightarrow{HI} = 1 \overrightarrow{GB}$ |
| c) $\overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{IG}$ | c) $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{IG}$ |
| d) $\overrightarrow{HZ} = \dots \overrightarrow{ZB}$ | d) $\overrightarrow{HZ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{ZB}$ |
| e) $\overrightarrow{ZA} = \dots \overrightarrow{ZG}$ | e) $\overrightarrow{ZA} = -2 \overrightarrow{ZG}$ |



68

Beschouw de drie punten $A(0, 0)$, $B(1, 3)$ en $C(6, 5)$. Bepaal de coördinaat van het punt D zodat de vierhoek $ABCD$ een parallellogram is.

- De diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor.

$$M \text{ is het midden van } [AC] \Rightarrow \text{co}(M) = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+5}{2} \right) = \left(3, \frac{5}{2} \right)$$

$$M \text{ is het midden van } [BD] \Rightarrow \text{co}(M) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{3+y}{2} \right)$$

$$\frac{1+x}{2} = 3 \quad \text{en} \quad \frac{3+y}{2} = \frac{5}{2}$$

$$1+x = 6 \quad 3+y = 5$$

$$x = 5 \quad y = 2$$

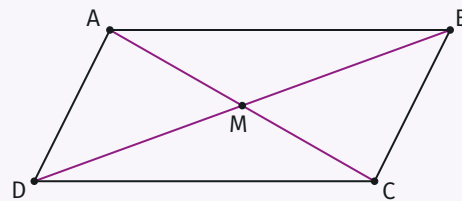
$$\text{co}(D) = (5, 2)$$

Antwoord: De coördinaat van het punt D is $(5, 2)$.



69

Gegeven: parallellogram $ABCD$
 M is het midden van de diagonalen $[AC]$ en $[DB]$



Vul aan.

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \dots$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \dots$	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \dots$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \dots$	$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} = \dots$	$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \dots$	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \dots$	$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \dots$	$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM}$
$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \dots$	$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \dots$	$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$

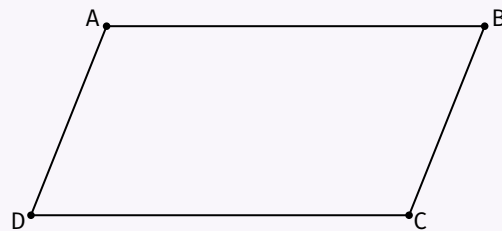


70

Gegeven: parallellogram $ABCD$

Te bewijzen: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

TIP $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Bewijs: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$ (Chasles-Möbius)

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$$
 (Chasles-Möbius)

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$$
 (overstaande zijden van een parallellogram)

$$= 2\overrightarrow{BC}$$



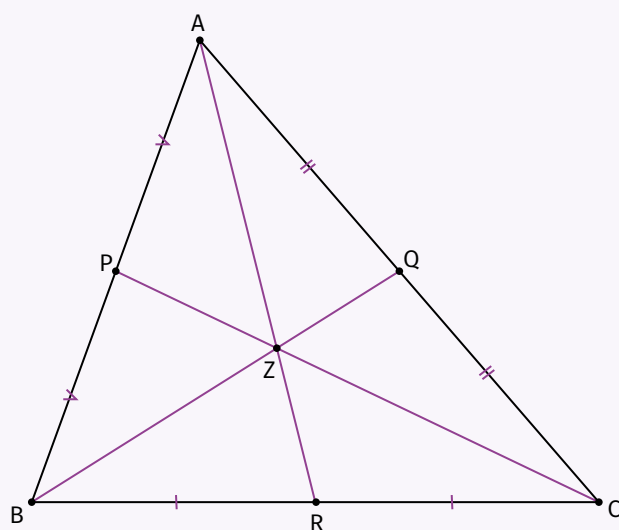
stelling Een zwaartepunt van een driehoek verdeelt elke zwaartelijn in twee lijnstukken waarvan het ene twee keer langer is dan het andere. Het langste lijnstuk is het lijnstuk van het hoekpunt tot het zwaartepunt. Het kortste lijnstuk is het lijnstuk van het zwaartepunt tot het midden van de overstaande zijde.

Gegeven: $\triangle ABC$ met zwaartepunt Z
 $[AR]$, $[BQ]$ en $[CP]$ zijn zwaartelijnen

$[BQ]$ is een zwaartelijn $\Leftrightarrow Q$ is midden van $[AC] \Leftrightarrow \vec{AQ} = \vec{QC}$

$[AR]$ is een zwaartelijn $\Leftrightarrow R$ is midden van $[BC] \Leftrightarrow \vec{BR} = \vec{RC}$

$[CP]$ is een zwaartelijn $\Leftrightarrow P$ is midden van $[AB] \Leftrightarrow \vec{AP} = \vec{PB}$



TIP Op de zwaartelijn $[AR]$ nemen we het punt Z zodat $|AZ| = 2 \cdot |ZR|$.
 Uit het gegeven kun je echter niet besluiten dat Z het zwaartepunt is. We bewijzen dat de zwaartelijnen $[BQ]$ en $[CP]$ door het punt Z gaan en dat $|BZ| = 2 \cdot |ZQ|$ en $|CZ| = 2 \cdot |ZP|$.

Te bewijzen: $|AZ| = 2 \cdot |ZR|$
 $|BZ| = 2 \cdot |ZQ|$
 $|CZ| = 2 \cdot |ZP|$ of $\vec{BZ} = 2 \cdot \vec{ZQ}$ en $\vec{CZ} = 2 \cdot \vec{ZP}$

Bewijs:

- $[QR]$ is een middenparallel evenwijdig aan $[AB]$ in $\triangle ABC$ waaruit volgt dat $\vec{BA} = 2 \cdot \vec{RQ}$.

$$\begin{aligned} \vec{BZ} &= \vec{BA} + \vec{AZ} && \text{(Chasles-Möbius)} \\ &= \vec{BA} + 2 \cdot \vec{ZR} && \text{(gegeven)} \\ &= 2 \cdot \vec{RQ} + 2 \cdot \vec{ZR} && \text{(eigenschap middenparallel)} \\ &= 2 \cdot (\vec{RQ} + \vec{ZR}) && \text{(distributiviteit)} \\ &= 2 \cdot (\vec{ZR} + \vec{RQ}) && \text{(optellen van vectoren is commutatief)} \\ &= 2 \cdot \vec{ZQ} && \text{(Chasles-Möbius)} \end{aligned}$$

- Analoog kun je bewijzen dat $\vec{CZ} = 2 \cdot \vec{ZP}$.

Opdracht

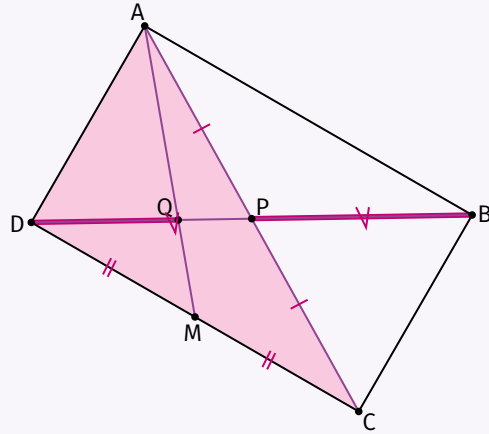
Gegeven: parallellogram ABCD, de diagonalen snijden elkaar in het punt P
AM is een zwaartelijn van $\triangle ACD$

Gevraagd:

a) Toon aan dat $\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{PB}$.

b) Vul het juiste getal in:

$$\overrightarrow{QP} = \dots \overrightarrow{DB}$$



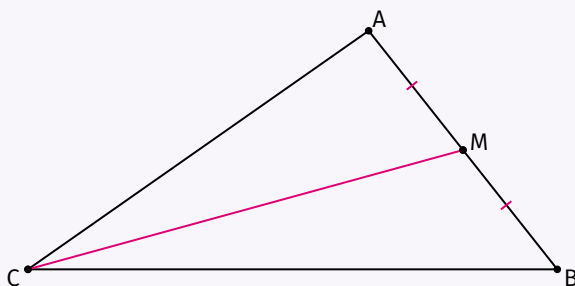
$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{DQ} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{DP} \quad (\text{eigenschap zwaartelijn DP in } \triangle ACD) \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{PB} \quad (\text{diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor}) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{QP} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DB}$$



72

In $\triangle ABC$ is M het midden van $[AB]$. Bewijs dat $2\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$ en vul het bewijs aan.



Gegeven: $\triangle ABC$
 M is het midden van $[AB]$

Te bewijzen: $2\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$

Bewijs:

- We drukken het gegeven m.b.v. vectoren uit:
 M is het midden van $[AB] \Leftrightarrow \dots = \dots$

- We moeten bewijzen dat $2\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \dots \quad (1)$$

$$\vec{CM} = \vec{CB} + \dots \quad (2)$$

$$+ \frac{\vec{CM} + \vec{CM}}{\quad} = \vec{CA} + \vec{AM} + \vec{CB} + \vec{BM} \quad (1) + (2)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM} + \vec{CB} + \vec{BM}$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{AM} + \vec{BM} \quad (3)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{MB} + \vec{BM} \quad (\text{def. midden})$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} - \dots + \vec{BM}$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{0} \quad (4)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} \quad (5)$$

- We drukken het gegeven m.b.v. vectoren uit:
 M is het midden van $[AB] \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$

- We moeten bewijzen dat $2\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB}$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM} \quad (1)$$

$$\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{BM} \quad (2)$$

$$+ \frac{\vec{CM} + \vec{CM}}{\quad} = \vec{CA} + \vec{AM} + \vec{CB} + \vec{BM} \quad (1) + (2)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM} + \vec{CB} + \vec{BM}$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{AM} + \vec{BM} \quad (3)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{MB} + \vec{BM} \quad (\text{def. midden})$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} - \vec{BM} + \vec{BM}$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} + \vec{0} \quad (4)$$

$$2 \cdot \vec{CM} = \vec{CA} + \vec{CB} \quad (5)$$

Welke eigenschappen (p. 9 en 10) werden gebruikt bij de overgangen (3), (4) en (5)?

(3) De optelling van vectoren is commutatief.

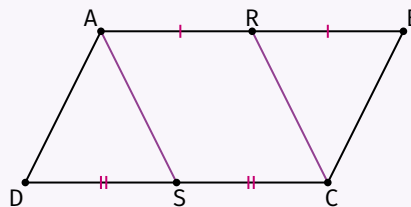
(4) Voor elke vector bestaat er een symmetrisch element voor de optelling, de tegengestelde vector.

(5) Er bestaat een neutraal element voor de optelling van vectoren, de nulvector $\vec{0}$.

73

Gegeven: parallellogram ABCD
 R is het midden van $[AB]$
 S is het midden van $[CD]$

Te bewijzen: $\vec{AS} = \vec{RC}$



Bewijs:

$$\vec{AS} = \vec{AD} + \vec{DS}$$

$$= \vec{BC} + \vec{RB} \quad (\text{overstaande zijden van een parallellogram} + \text{def. midden van lijnstuk})$$

$$= \vec{RB} + \vec{BC} \quad (\text{de optelling van vectoren is commutatief})$$

$$= \vec{RC} \quad (\text{Chasles-Möbius})$$

